

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Чисельні методи»

зі спеціальності 121

«ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ»

Розробила викладач _____ С.С. Ланська

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова ЦК ПІ: _____ С.С. Ланська

Дніпро

2021

Лекція № 1

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Предмет і метод обчислювальної математики, її роль в дослідженні

математичних та фізичних моделей. Точні і наближені числа. Джерела похибок.

Класифікація похибок. Відносні та абсолютні похибки.

Мета заняття Знати різницю між точним та наближеним числом, класифікацію та джерела похибок, а також відрізняти абсолютні та відносні похибки.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 2 години

План проведення лекції

1.1 Предмет і метод обчислювальної математики.

1.2 Точні і наближені числа. Джерела похибок. Класифікація похибок.

1.3 Відносні та абсолютні похибки. Значущі цифри. Правильні значущі цифри.

Література

1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: навч. посіб /Л.П.

Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006 – 480с.

2 Чисельні методи [Текст] : навч. посіб / под заг. ред. Н.И. Даніліна. –

2-е вид. – М.:Вища школа, 1976 г. –192 с.

Навчальні матеріали лекції

ВСТУП

1 Навчальне питання: Предмет і метод обчислювальної математики

Розв'язування будь-якої задачі починається з її словесного формулювання. Наприклад, задача, що виникла перед стародавнім нерозважливим царем під час плати за послугу одному хитруну. Хитрун запропонував заплатити кількістю хлібних зерен

на шаховій дошці, якщо на першу клітину покласти одне зерно, на другу – два, на третю – чотири, і так далі, щоразу подвоюючи кількість зерен. Скупий цар радісно погодився з такою формою оплати та невдовзі гірко побивався, коли хитрун забрав всі запаси хліба в царстві та ще й того не вистачило.

Людська мова є дуже надлишковою та неоднозначною. Тому наступним етапом опанування задачі є її формулювання у математичній формі, тобто складання математичної моделі задачі. Неважко записати формулу підрахунку:

$$\text{кількість зерен} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = \sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} \approx 10^{19}. \quad (1.1)$$

Отриманий вираз є окремим випадком степеневого поліному

$$p = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}. \quad (1.2)$$

Вираз (1.1) утворюється з (1.2) при $n=64$, $a_i=1$, $x=2$.

Отже, розглянемо задачу підрахунку значення степеневого поліному (1.2). Така задача часто виникає в обчисленнях, зокрема в нашому курсі.

Майже завжди розв'язувати задачу за математичною моделлю можна по-різному, різними методами. Щоби правильно обрати метод розв'язування задачі, треба знати різні методи та вміти вибрати такий, що найкраще відповідає умовам розв'язування.

Значення степеневого полінома можна обрахувати безпосередньо за формулою (1.2). Для цього потрібно $(n-1)$ операцій множення, $(n-2)$ операцій піднесення до цілого степеня та $(n-1)$ операцій додавання.

Англійський математик початку 19-го сторіччя Вільямс Горнер (Horner) запропонував підрахунок степеневого полінома за формулою

$$p = a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n)\dots)). \quad (1.3)$$

Для підрахунку за формулою Горнера треба $(n-1)$ операцій множення та $(n-1)$ операцій додавання, що помітно простіше підрахунку за формулою (1.2). Крім того, за формулою Горнера додаються числа, що є ближчими за абсолютними значеннями, ніж доданки у формулі (1.2). Тому результат за формулою Горнера загалом точніший, якщо обчислювати з обмеженою кількістю значущих цифр.

До речі, першим застосував формулу (1.3) геніальний Ньютон ще за півтора століття до Горнера. Але так історично склалось, що цю формулу називають іменем Горнера. Втім, на всесвітній авторитет Ньютона це ніяк не вплинуло.

Вибираючи метод розв'язування задачі, треба керуватись такими основними ознаками:

- громіздкість обчислень, тобто потрібна кількість арифметичних операцій;
- необхідний об'єм оперативної пам'яті;
- гарантована точність результату.

Наступний етап, близький до вибору методу, – це складання алгоритму розв'язування, тобто впорядкованої однозначної послідовності дій для досягнення мети. Майже кожен математичну задачу можна записати різними алгоритмами. “Мистецтво” програмування власне полягає у вмінні вибрати найкращий алгоритм за ознаками, подібними до ознак вибору методу розв'язування.

Складні алгоритми зручно подавати у вигляді блок-схем. Широко розповсюджені алгоритмічні мови, що є проміжними між математичною мовою та мовою машинних команд. На відміну від математичної мови алгоритмічні мови є строго однозначними. Алгоритмічні мови розрізняють за функціональним призначенням та рівнем, тобто умовним розміщенням між математичною мовою та мовою машинних команд. Чим ближча алгоритмічна мова до математичної, тим вище її рівень. Найвищі рівні мають, наприклад, мови MATHCAD та MATLAB. Найнижчі рівні у мов-асемблерів. Кожній алгоритмічній мові надається транслятор, тобто спеціальна програма, що перекладає тексти програм на мову машинних команд.

Програма, записана на алгоритмічній мові, підлягає відлагодженню. Під час відлагодження програми знаходять та виправляють помилки запису. Правильність роботи програми перевіряється на тестових задачах, від якості яких залежить якість відлагодження.

Відлагоджена програма нарешті готова до розв'язування задачі, для якої була написана. Однак отримані результати розрахунків ще не означають завершення роботи. Ці результати треба інтерпретувати, тобто зрозуміти і використати.

Часто на етапі інтерпретації виявляється, що задача була неточно або взагалі невірно сформульована, або обрано невідповідний метод чи алгоритм розв'язування. Тоді треба повертатись до попередніх етапів.

Отже, розв'язування задачі на ЕОМ складається з таких послідовних етапів:

- словесне формулювання задачі;
- створення математичної моделі задачі;
- вибір методу та алгоритму розв'язування;
- запис алгоритму розв'язування на обраній алгоритмічній мові;
- відлагодження програми;
- розрахунки на ЕОМ;
- інтерпретація результатів розв'язування;
- в разі необхідності повернення до початкових етапів.

2 Навчальне питання: Точні і наближені числа. Джерела похибок. Класифікація похибок.

В процесі рішення задачі обчислювач стикається з різноманітними числами, які можуть бути точними або наближеними. Точні числа дають дійсне значення величини числа, наближені, — близьке до істинного, причому ступінь близькості визначається похибкою обчислення.

Наприклад, в твердженнях: «куб має 6 граней»; «на руці 5 пальців»; «у класі 32 учні»; «в книзі 582 сторінки» числа 6, 5, 32, 582 — точні. У твердженнях: «ширина будинку 14,25 м»; «вага коробки 50 грам»; «у лісі близько 5000 дерев» числа 14,25; 50; 5000 — приблизні. Вимірювання ширини будинку проводиться вимірювальними засобами, які самі можуть бути неточними; крім того, вимірник при вимірюванні припускається помилки (погрішність). При зважуванні коробки також допускається помилка, оскільки автоматичні ваги не чутливі до збільшення або зменшення ваги на 0,5 р. Зробити точно підрахунок кількості дерев в лісі неможливо, оскільки деякі дерева можуть бути підраховані двічі; інші зовсім не включалися в рахунок; деякі дерева були віднесені до чагарників і виключені з рахунку, і, навпаки, чагарники включені в рахунок кількості дерев.

У багатьох випадках життю неможливо знайти точне значення величини числа і обчислювачу доводиться задовольнятися його приблизним значенням. Крім того, дуже часто обчислювач свідомо замінює точне значення наближеним в цілях спрощення обчислень.

Таким чином, наближеним числом a називається число, що незначно відрізняється від точного числа A і замінюючи останнє в обчисленнях.

При рішенні тієї або іншої задачі уручну або на обчислювальній машині ми отримуємо числовий результат, який, як правило, не є точним, оскільки при постановці завдання і в ході обчислень виникають погрішності. Тому будь-яке завдання, пов'язане з масовими діями над числами, може бути вирішена з тим або іншим ступенем точності. У зв'язку з цим при постановці завдання має бути вказана точність її рішення, тобто задана погрішність, максимально припустима в процесі всіх обчислень.

Джерелами погрішностей (помилки) можуть бути:

1) Неточне відображення реальних процесів за допомогою математики, у зв'язку з чим розглядається не сам процес, а його ідеалізована математична модель. Не завжди реальні явища природи можна точно відобразити математично. Тому приймаються умови, що спрощують рішення задачі, що викликає появу похибки. Деякі завдання неможливо вирішити в точній постановці і вони можуть замінюватися іншими завданнями, близькими по результатам перших. При цьому також виникають погрішності.

2) Наближений вираз даних, що входять в умову задачі, унаслідок їх неточного вимірювання. Це погрішності початкових даних, фізичних констант, чисел та ін.

3) Заміна нескінченних процесів, межами яких є шукані величини, кінцевою послідовністю дій. Сюди відносяться погрішності, що утворюються в результаті обриву якогось нескінченного процесу на деякому етапі. Наприклад, якщо в ряду

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

узяти певну кількість членів і прийняти їх суму за $\sin x$ то ми, природно, припускаємося похибки.

4) Округлення початкових даних, проміжних або остаточних результатів, коли при обчисленнях використовується лише кінцеве число цифр числа.

При відкиданні молодших розрядів числа має місце похибка. Хай, наприклад, число 0,7835478931 потрібно записати в комірку електронної цифрової обчислювальної машини «Мінськ 1». Розрядна сітка машини допускає запис семизначного десяткового числа. Тому дане число потрібно округляти так, щоб в ньому залишилося не більше семи знаків після коми. Тоді заокруглене число прийме наступний вигляд: 0,7835479.

5) Окрім вказаних вище випадків, погрішності можуть появлятися в результаті дій над наближеними числами. В цьому випадку погрішності початкових даних в якійсь мірі переносяться на результат обчислень.

Повна погрішність є результатом складного взаємодії всіх видів погрішностей. При вирішенні конкретних завдань ті або інші погрішності можуть бути відсутніми або мало впливати на утворення повної погрішності. Проте для повного аналізу похибок необхідно враховувати всі їх види.

У всіх випадках повна погрішність не може перевищувати по своїй абсолютній величині суми абсолютних величин всіх видів похибок, але зазвичай вона рідко досягає такої максимальної величини.

Таким чином, погрішності можна підрозділити на три великі групи:

1) Початкові, або неусувні, до яких відносяться погрішності, що виникають в результаті наближеного опису реальних процесів і неточного завдання початкових даних, а також погрішності пов'язані з діями над наближеними числами. Ці похибки проходять через всі обчислення і є неусувними.

2) Погрішності округлення (що зароджуються), які з'являються в результаті округлення початкових даних, проміжних і остаточних результатів.

3) Залишкові, виникаючі в результаті заміни нескінченних процесів кінцевою послідовністю дій.

Оцінка погрішності може бути проведена: за допомогою абсолютної погрішності; за допомогою відносної погрішності; за допомогою залишкового члена; за допомогою статистичних оцінок.

При роботі з наближеними величинами обчислювач повинен уміти:

- давати математичні характеристики точності наближених величин;
- знаючи ступінь точності початкових даних, оцінити ступінь точності результатів;
- брати початкові дані з таким ступенем точності, щоб забезпечити задану точність результату. В цьому випадку не слідє занадто завищувати точність початкових даних, щоб позбавити обчислювача від даремних розрахунків;
- уміти правильно побудувати обчислювальний процес, щоб позбавити його від тих викладень, які не зроблять впливу на точні цифри результату.

3 Навчальне питання: Абсолютна і відносна погрішності

Раніше було дано, визначення наближеного числа: приблизним числом а називається число, що трохи відрізняється від точного числа A і замінюючи його в обчисленнях.

Якщо $a < A$, те говорять, що число a є наближеним значенням числа A по недоліку; якщо $a > A$ — наближеним значенням по надлишку.

Різниця між точним числом A і його наближеним значенням a складає помилку, або погрішність. Якщо $a < A$, то $A - a > 0$; якщо $a > A$, то $A - a < 0$.

Як правило, знак похибки обчислювача не цікавить, тому користуються абсолютною помилкою, або абсолютною похибкою.

Абсолютна величина різниці між точним числом A до його наближеним значенням a називається абсолютною погрішністю наближеного числа a :

$$\Delta_a = |A - a| \quad (1.4)$$

Тут можливі два випадки:

1) Точне число A нам відомо. Тоді абсолютна погрішність наближеного числа a легка знаходиться по формулі (1.4).

Приклад 1. $\Delta_A = 784,2737$; $A = 784,274$; $A = 784,274$; тоді абсолютна погрішність $\Delta_a = |A - a| = 784,2737 - 784,274 = -0,0003$.

2) Точне число A нам невідомо, тоді обчислити абсолютну похибку за формулою (1.4) не можна. Тому користуються поняттям межі абсолютної погрішності, що задовольняє нерівності

$$|A - a| \leq \Delta_a$$

Межа абсолютної погрішності, тобто число, свідомо перевищуючий абсолютну погрішність (або в крайньому випадку рівне їй), називається граничною абсолютною погрішністю.

Отже, якщо — гранична абсолютна погрішність, то

$$\Delta a = |A - a| \leq \Delta a \quad (1.5)$$

Значення точного числа A завжди поміщено в наступних межах;

$$a - \Delta a < A < a + \Delta a \quad (1.6)$$

Вираз $a - A$ є наближення числа A по недоліку, а $a + A$ — наближення числа A по надлишку. Значення числа A записується так:

$$A = a \pm \Delta a \quad (1.6')$$

Приклад 2. Число 45,3 отримано округленням. Точне значення числа невідомо, проте, користуючись правилами округлення чисел, можна сказати; що абсолютна погрішність не перевищує (менше або рівна) 0,05.

Отже, за межу абсолютної погрішності (граничною абсолютною погрішністю) можна вважати 0,05. Записують це так: 45,3(± 0,05). Дужки часто опускають, так що запис 45,3 ± 0,05 означає те ж саме. Подвійний знак ± означає, що відхилення наближеного значення числа від точного можливо в обидві сторони. Як межа абсолютної погрішності беруть по можливості найменше число.

На практиці часто застосовують вирази типу: «з точністю до 0,01»; «з точністю до 1 см» і так далі Це означає, що гранична абсолютна погрішність відповідно дорівнює 0,01; 1 см і так далі

Приклад 4. Якщо довжина відрізання $I = 184$ см зміряна з точністю до 0,05 см, то пишуть $I = 184$ см ± 0,05. Тут гранична абсолютна погрішність $A = 0,05$ см, а точна величина довжини I відрізання поміщена в наступних межах $183,95$ см < I < $184,05$.

По абсолютній і граничній абсолютній погрішностям не можна судити про те, добре або погано проведено вимірювання.

Для того, щоб визначити якість проведених вимірювань, необхідно визначити, яку частку складає абсолютна або гранична абсолютна погрішність від вимірюваної величини. У зв'язку з цим вводиться поняття відносної погрішності.

Відносною погрішністю δ_a наближеного числа a називається відношення абсолютної погрішності Δ_a до модуля точного числа A ($A \neq 0$), тобто

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} \quad (1.7)$$

Число δ_a , що свідомо перевищує відносну погрішність (або в крайньому випадку рівне їй), називається граничною відносною погрішністю:

$$\delta_a \leq \delta_a \quad (1.8)$$

Із співвідношень (1.4) і (1.5) витікає, що

$$\frac{\Delta_a}{|A|} \leq \delta_a.$$

З визначення граничної абсолютної погрішності виходить, що $\Delta_a \leq |A|\delta_a$. Тоді можна записати

$$\Delta_a = |A|\delta_a \quad (1.9)$$

і за граничну відносну погрішність наближеного числа a можна прийняти $\Delta_a = |a|\delta_a$.

Враховуючи, що A , як правило, невідомо і що A (1.7) і (1.8) можна записати так:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Дайте означення наближеного числа.
- 2) Назвіть причини виникнення похибок.
- 3) Що таке похибка?
- 4) Як класифікуються похибки ? Дайте їх означення.

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 2

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Нелінійні рівняння з одним невідомим. Виділення коренів. Однокрокові та багатокрокові

Мета заняття Знати графічні та аналітичні методи рішення рівнянь та систем.

Знати принципи відокремлення коренів. Знати теорему про оцінку похибки наближеного значення кореня

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Нелінійні рівняння з одним невідомим. Критерії досягнення потрібної точності.
- 2 Відокремлення коренів нелінійних рівнянь.

Література

1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: учеб.пособие /Л.П.

Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BVH, 2006 – 480с.

2 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. –

Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. –

Навчальні матеріали лекції

1 Навчальне питання: Нелінійні рівняння з одним невідомим. Критерії досягнення потрібної точності.

Кожне рівняння з однією змінною можна записати в загальному вигляді так:

$$f(x)=0 \quad (2.1)$$

Нехай всюди далі функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку (a, b) . Рівняння (2.1) можна переписати наступним чином

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad (2.2)$$

якщо $f(x)$ представити у вигляді $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$. Надалі будемо вважати, рівняння з однією змінною записане у вигляді (1).

Якщо в рівнянні (2.1) функція $f(x)$ – алгебраїчний многочлен, то рівняння називається *алгебраїчним*. Якщо функція $f(x)$ містить тригонометричні, показникові, логарифмічні функції чи їх композиції, то рівняння називають *трансцендентним*.

Число ξ називається *коренем* рівняння (2.1), якщо при підстановці замість x числа ξ рівняння перетворюється в тотожність. Корінь рівняння (2.1) ще називають *нулем* функції $f(x)$.

Розв'язати рівняння означає знайти множину всіх його коренів, як дійсних, так і комплексних. Основною задачею, що розглядається в цій темі, є задача знаходження дійсних коренів рівняння виду (2.1). Зауважимо, що знайти точні значення коренів рівняння можна лише для певних класів рівнянь: алгебраїчних рівнянь не вище четвертого степеня (лінійне, квадратне, кубічне, біквадратне), окремих класів алгебраїчних рівнянь вищих степенів та деяких класів трансцендентних рівнянь.

Отже, універсального методу знаходження точних коренів будь-якого рівняння з однією змінною не існує. Крім того, при розв'язуванні практичних задач часто дістають рівняння з коефіцієнтами, які є наближеними числами. В таких випадках постановка задачі про знаходження точних коренів взагалі втрачає сенс. Тому важливого значення набувають методи наближеного обчислення коренів. Задача знаходження коренів рівняння (2.1) вважається розв'язаною, якщо корені обчислені із наперед заданою точністю.

Критерії досягнення потрібної точності. Фразу “корінь обчислено із наперед заданою точністю” треба розуміти так. Нехай ξ – точний корінь рівняння, а $\bar{x}$ – його наближення з точністю ε . Це означає, що $|\xi - \bar{x}| \leq \varepsilon$

Якщо встановлено, що шуканий корінь належить проміжку $[a, b]$, причому $|b-a| \leq \varepsilon$, то числа a і b – наближені значення кореня ξ з точністю ε з недостатчею і надлишком відповідно. Зауважимо, що будь-яке число з відрізка $[a, b]$, можна взяти за наближене значення кореня ξ з точністю ε . Як правило, беруть середнє

арифметичне чисел a і b , тобто $\xi \approx \frac{a+b}{2}$.

Переконатися в тому, що потрібна точність при обчисленні кореня вже досягнута, можна й іншими способами. Зокрема, нехай рівняння задано у вигляді (2.1). Якщо на деякому проміжку $[\alpha, \beta]$ функція $f(x)$ диференційована і в деякій точці $\bar{x} \in [\alpha, \beta]$ виконується умова

$$\frac{|f(\bar{x})|}{\min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)|} \leq \varepsilon$$

то вважають, що $\bar{x}$ — наближене значення кореня ζ з точністю ε .

Мінімум модуля похідної функції f на відрізку $[\alpha, \beta]$ можна знайти, використовуючи наступне твердження.

Твердження. Якщо в інтервалі (α, β) перша і друга похідні функції $f(x)$ мають однакові знаки, то мінімум модуля похідної досягається в точці α .

Якщо в інтервалі (α, β) знаки першої і другої похідних функції $f(x)$ різні, то мінімум модуля похідної досягається в точці β .

Або в символічному записі:

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \ f'(x)f''(x) > 0 \Rightarrow \min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)| = |f'(\alpha)|$$

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \ f'(x)f''(x) < 0 \Rightarrow \min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)| = |f'(\beta)|$$

Зауважимо, що у випадку коли $m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)| = 0$ потрібно змінити один з кінців проміжку (α, β) так, щоб $m \neq 0$.

Процес розв'язування рівняння з однією змінною складається з двох етапів: відокремлення коренів та уточнення коренів.

На першому етапі потрібно знайти відрізки, на кожному з яких міститься тільки один корінь рівняння. Другий етап полягає у наближеному обчисленні кожного з коренів із заданою точністю.

2 Навчальне питання: Відокремлення коренів нелінійних рівнянь.

Корінь вважається відокремленим на відрізку, якщо на ньому рівняння не має інших коренів. Є два способи відокремлення коренів: графічний та аналітичний.

Графічний метод. Якщо рівняння записане у вигляді (1), то для відокремлення коренів будують графік функції $y = f(x)$. Абсиси точок перетину графіка з віссю Ox є коренями рівняння, оскільки в цих точках $y = 0$ (див. рис. 2.1, а).

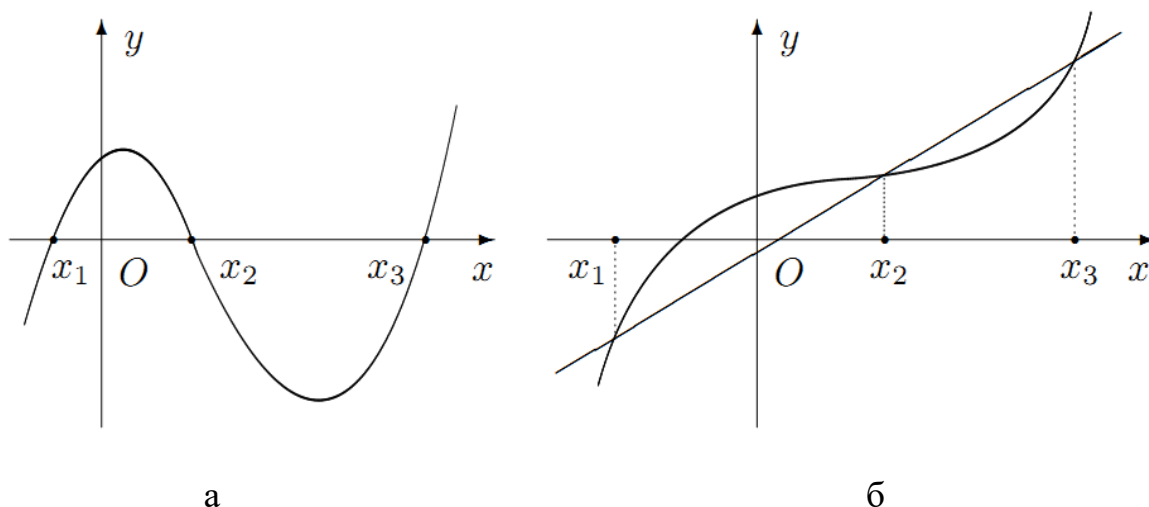


Рисунок 2.1 – Графічні методи відокремлення коренів

Тоді, коли графік функції $y = f(x)$ побудувати складно, рівняння (2.1) записують у вигляді (2.2), вибираючи функції $\check{A}(x)$ і $\check{B}(x)$ так, щоб їх графіки будувалися без особливих ускладнень. Абсиси точок перетину графіків цих двох функцій є коренями рівняння (див. рис. 2.1, б).

Для графічного методу характерна невисока точність, тому припущення про відокремлені корені, як правило, перевіряють аналітичним методом.

Аналітичний метод. Цей метод базується на деяких властивостях неперервних функцій, що вивчаються в курсі вищої математики. Сформулюємо без доведення відповідні теореми.

Теорема 1 (існування кореня). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, то всередині відрізка $[a; b]$ існує принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Зауважимо, що при виконанні умов теореми 1 може виявитись, що на відрізку є кілька коренів. Таку ситуацію зображено на рисунку 2.1, а.

Теорема 2 (існування та єдиності кореня). Якщо функція $f(x)$ неперервна і монотонна на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, то всередині відрізка $[a; b]$ рівняння (2.1) має корінь, причому єдиний.

Теорема 3 (існування та єдиності кореня). Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційована на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, а похідна $f'(x)$ зберігає знак всередині відрізка $[a; b]$, то рівняння (2.1) має на проміжку $[a; b]$ корінь, причому єдиний.

Для того, щоб довести, що похідна зберігає знак всередині відрізка $[a; b]$, потрібно показати, що $[a; b]$ повністю міститься в одному з проміжків знакосталості функції $y = f(x_0)$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Як ви розумієте фразу “корінь обчислено із наперед заданою точністю” ?
- 2) Що означає термін “відокремити корені рівняння” ?
- 3) Які ви знаєте методи уточнення коренів ?
- 4) Сформулюйте теореми, на яких ґрунтується аналітичний метод відокремлення коренів.
- 5) Сформулюйте постановку задачі розв'язання рівняння з одним невідомим.
- 6) Які умови повинен задовольняти відрізок, на якому ведеться пошук розв'язку рівняння? Як його можна знайти?
- 7) У чому полягає метод дихотомії для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 3

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Уточнення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь методом хорд

Мета заняття Знати принципи уточнення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь методами хорд

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

1 Уточнення коренів рівняння методом хорд.

Література

1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: учеб.посobie /Л.П.

Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006 – 480с.

2 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. –

2- е изд. – М.:Высшая школа, 1976 г. –192 с.

Навчальні матеріали лекції

1 Уточнення коренів рівняння методом хорд.

Нехай задане рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ — безперервна функція, яка має в інтервалі $[a, b]$ похідні першого та другого порядків.

Корінь відділений, знаходиться на відріжку $[a, b]$, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ідея метода полягає в тому, що на достатньо малому відріжку $[a, b]$ дуга кривої $y = f(x)$ замінюється стягуючою її хордою. Як наближене значення кореня приймається точка перетину хорди з віссю Ox (див. рис. 3.1).

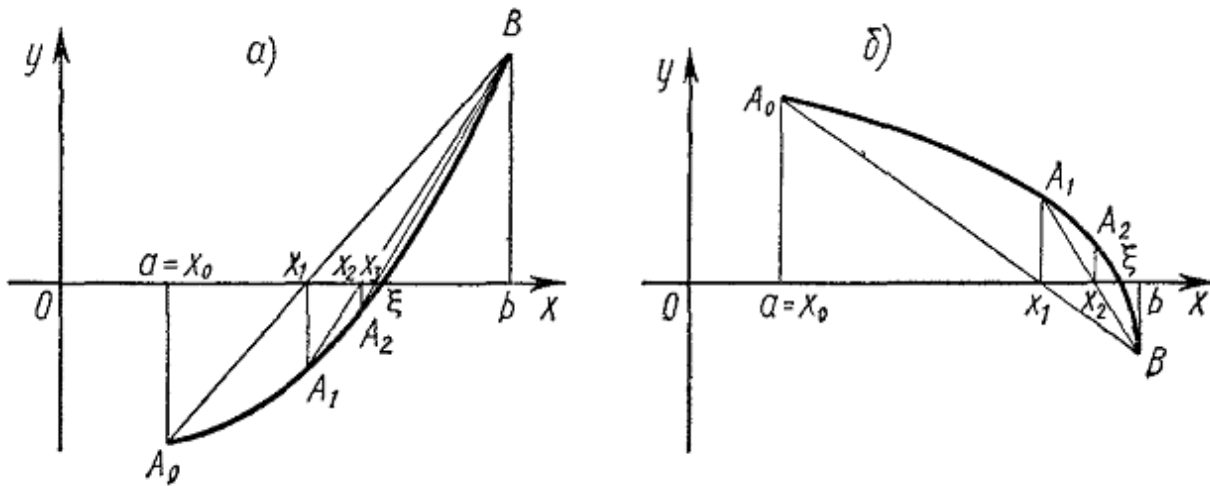


Рисунок 3.1 – Метод хорд (перша та друга похідні мають однакові знаки)

Розглянемо випадки , коли перша та друга похідні мають однакові знаки , тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Нехай $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$ (див. рис. 3.1,а). Графік функції $f(x) = 0$ проходить через точки $A_0(a, f(a))$ та $B_0(b, f(b))$. Корінь рівняння $f(x) = 0$, є абсциса точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox . Ця точка поки невідома. Якщо ми замінимо дугу A_0B_0 хордою A_0B_0 , то точка перетину хорди з віссю Ox x_1 буде приближеним значенням кореня.

Рівняння хорди , яка проходить через точки A_0 та B_0 має вигляд:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (3.1)$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (3.2)$$

Ця формула називається формулою хорд.

Тепер корінь рівняння знаходиться в середині відрізка $[x_1, b]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє , його можна уточнити, застосувавши метод хорд для відрізка $[x_1, b]$.

З'єднаємо точки $A_1(x_1, f(x_1))$ з точкою $B_0(b, f(b))$ і знайдемо точку перетину хорди A_1B_0 з віссю Ox .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \quad (3.3)$$

Продовжити процес, знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)}, \quad (3.4)$$

взагалі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \quad (3.5)$$

Процес продовжуємо до тих пір, поки не визначимо корінь із заданою точністю, тобто $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, де ε - задана точність.

По вище приведеним формулам обчислюються корені для випадку, коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (див. рис. 3.1,б).

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, (див. рис. 3.2).

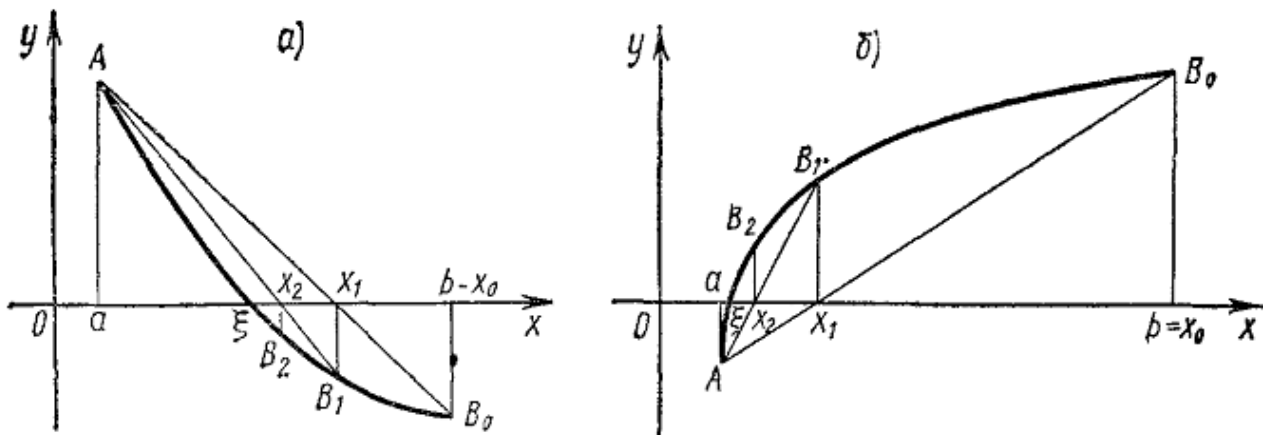


Рисунок 3.2 Метод хорд (перша та друга похідні мають різні знаки)

Нехай, наприклад, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (див. рис. 3.2,а). З'єднаємо точки $A_0(a, f(a))$ та $B_0(b, f(b))$ і запишемо рівняння хорди, що проходить через A_0 та B_0 :

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}, \quad (3.6)$$

знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)} \quad (3.7)$$

Тепер корінь знаходиться в середині відрізка $[a, x_1]$. Застосувавши метод хорд до відрізка $[a, x_1]$, запишемо:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)} \quad (3.8)$$

і взагалі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)} \quad (3.9)$$

По тим же формулам знаходимо наближене значення кореня і для випадку, коли $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ (див. рис. 3.2,б).

Вибір формул для уточнення кореня методом хорд виконують за правилом: нерухомим кінцем являється той, для якого знак функції співпадає із знаком другої похідної.

Таблиця 3.1 – Математичні позначення

Мат. позначення	Символ. ім'я	Значення за змістом	Змінна	
			тип	значення
f	F	Ім'я функції	дійсний	визнач.
f''	F ₂	Ім'я функції другої похідної	дійсний	визнач.
x	x	Поточне значення кореня	дійсний	визнач.
a	A	Ліва границя існування кореня	дійсний	вхідне
b	B	Права границя існування кореня	дійсний	вхідне
ε	EPS	Задана точність	дійсний	вхідне
-	X _N	Нове значення кореня, допоміжна змінна	дійсний	визнач.

Вирішення.

Вирішимо рівняння $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$. Визначимо корені аналітично.

Знаходимо

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5;$$

$$D = 0,16 - 0,6 < 0.$$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$ (див. табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Таблиця знаків функції $f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\text{sign } f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Рівняння має один дійсний корінь, який знаходиться в проміжку $[-1, 0]$.

Щоб уточнити корінь, знайдемо другу похідну $f''(x) = 6x - 0,4$; в проміжку $[-1, 0]$ виконується нерівність $f''(x) < 0$.

Для обчислень застосуємо формулу:

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a),$$

де $a = -1$; $x_0 = 0$;

$$f(a) = f(-1) = -1 - 0,2 - 0,5 + 1,5 = 0,2.$$

Обчислення розташуємо в таблиці (див. табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Результати обчислення кореню рівняння $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$0,2 x_n^2$	$0,5 x_n$	$f(x_n)$	$f(x_n)+0,2$	x_n-a	$\frac{f(a)}{f(x_n)-f(a)} \cdot (x_n - a)$
0	0	0	0	0	0	1,5	1,7	1	-0,118
1	-0,882	-0,6861	0,7779	0,1556	-0,441	0,2173	0,4173	0,118	-0,057
2	-0,943	-0,8386	0,8892	0,1778	-0,4715	0,0121	0,2121	0,057	-0,054
3	-0,946	-0,8466	0,8949	0,1790	-0,473	0,0014	0,2014	0,054	-0,054
4	-0,946								

Відповідь: $\delta \approx -0,946$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Розкрийте геометричний сенс методу хорд та дотичних.
- 2) У чому полягає метод хорд для розв'язання рівняння з одним невідомим?
- 3) Яку метод хорд має швидкість збіжності?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 4

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Уточнення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь методом Ньютона

Мета заняття Знати принципи уточнення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь методом Ньютона.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

1 Уточнення коренів рівняння методом Ньютона.

Література

- 1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: учеб.пособие /Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006 – 480с.
-
- 2 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. – 2-е изд. – М.:Высшая школа, 1976 г. –192 с.
-

Навчальні матеріали лекції

1 Уточнення коренів рівняння методом Ньютона

Нехай задане рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ — безперервна функція, яка має в інтервалі $[a, b]$ похідні першого та другого порядків і вони зберігають знаки на цьому відрізку.

Корінь відділений, знаходиться на відрізку $[a, b]$, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ідея методу полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a, b]$ дуга кривої $y = f(x)$ замінюється дотичною до цієї кривої. Як наближене значення кореня приймається точка перетину дотичної з віссю Ox (див. рис. 4.1)

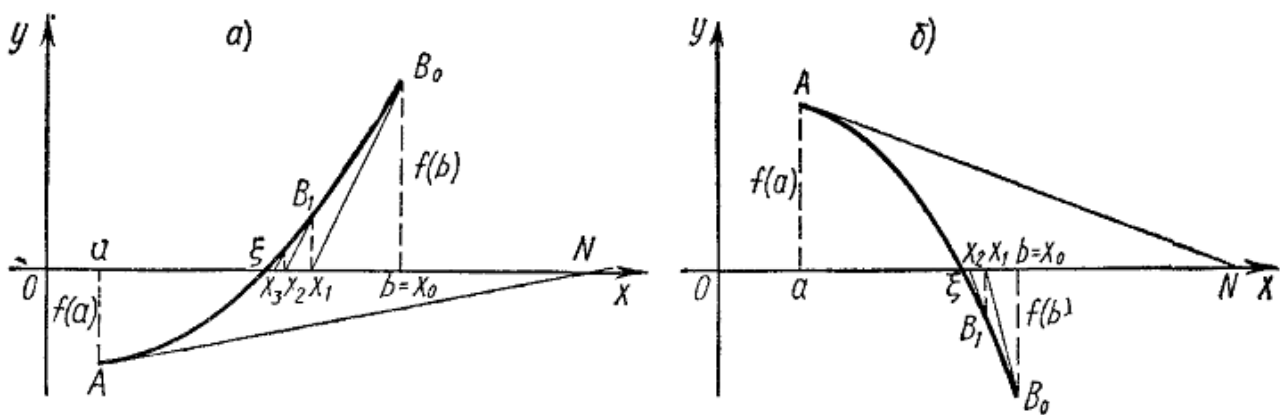


Рисунок 4.1 – Метод дотичних (перша та друга похідні мають однакові знаки)

Розглянемо випадки , коли перша та друга похідні мають однакові знаки , тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Нехай $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$ або $f(a) < 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (див. рис. 4.1, а). Графік функції $f(x) = 0$ проходить через точки $A_0(a, f(a))$ та $B_0(b, f(b))$. Корінь рівняння $f(x) = 0$, є абсциса точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox . Ця точка поки невідома. Якщо ми проведемо дотичну до кривої в точці B_0 , то точка перетину дотичної з віссю Ox — x_1 буде приближеним значенням кореня. Якщо провести дотичну до кривої в точці A_0 , то вона пересіче вісь Ox в точці ,що не належить відрізку $[a, b]$.

Рівняння дотичної в точці $B_0(b, f(b))$ має вид:

$$y - f(b) = f'(x) \cdot (x - b) \quad (4.1)$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (4.2)$$

Ця формула називається формулою дотичних.

Тепер корінь рівняння знаходиться в середині відрізка $[a, x_1]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє, його можна уточнити, застосовуючи метод дотичних на відрізку $[a, x_1]$.

Проведемо дотичну в точці $B_1(x_1, f(x_1))$ і знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (4.3)$$

Продовжити процес, знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \quad (4.4)$$

взагалі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.5)$$

Процес продовжуємо до тих пір, поки не визначимо корінь із заданою точністю, тобто $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, де ε - задана точність.

По вище приведеним формулам обчислюються корені для випадку, коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (див. рис. 4.1, б).

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, (див. рис. 4.2.)

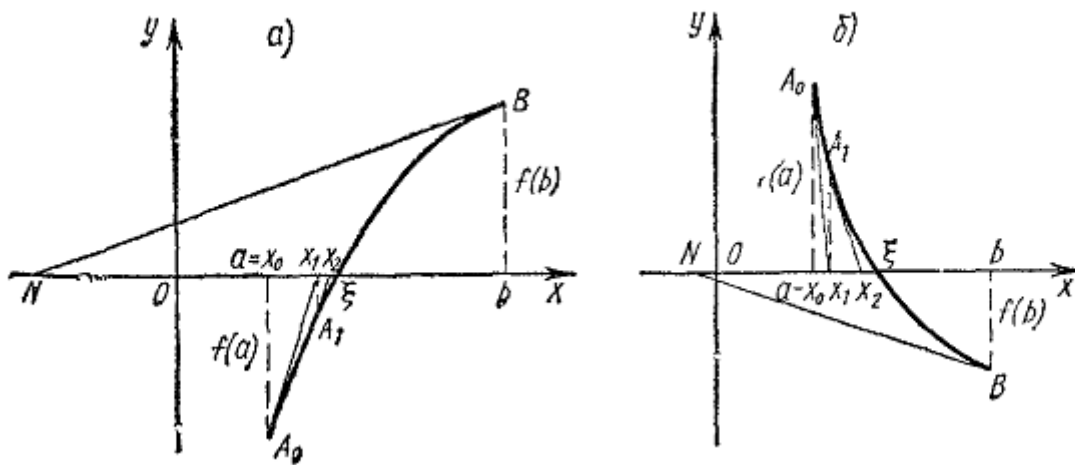


Рисунок 4.2 – Метод дотичних (перша та друга похідні мають різні знаки)

Нехай, наприклад, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ або $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (див. рис. 3.4, а, б). Якщо провести дотичну до кривої в точці B_0 , то вона пересіче вісь Ox в точці, що не належить відрізку $[a, b]$ Тоді проведемо дотичну в точці A_0 .

Рівняння дотичної в точці $A_0(b; f(b))$ має вид:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a). \quad (4.6)$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (4.7)$$

Тепер корінь рівняння знаходиться в середині відрізка $[x_1, b]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє, його можна уточнити, застосувавши метод дотичних для відрізка $[x_1, b]$.

Проведемо дотичну в точці A_1 і знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (4.8)$$

Продовжити процес, знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad (4.9)$$

взагалі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.10)$$

Таким чином, ми отримуємо послідовність наближених значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Розрахунки закінчуємо тоді, коли $|x_{n+1} - x_n| \leq \mu$, де μ - задана точність.

Порівнюючи формули (4.2) і (4.7) ми бачимо, що вони відрізняються тільки початковим наближенням: в першому випадку за x_0 приймаємо кінець відрізка b , в другому – початок a .

При виборі початкового наближення кореня користуються таким правилом: за початкову точку необхідно вибрати той кінець відрізка $[a; b]$, в якому знак функції співпадає із знаком другої похідної.

В першому випадку $f(b)f''(x) > 0$ - за початкову точку взято $b = x_0$, в другому – $f(a)f''(x) > 0$ і за початкове наближення прийнята точка $a = x_0$.

Таблиця 3.5 – Математичні позначення

Мат. позначення	Симв. ім'я	Значення за змістом	змінна	
			тип	значення
f	F	Ім'я функції	дійсний	визнач.
f''	F ₂	Ім'я функції другої похідної	дійсний	визнач.
x	x	Поточне значення кореня	дійсний	визнач.
a	A	Ліва границя існування кореня	дійсний	вхідне
b	B	Права границя існування кореня	дійсний	вхідне
μ	MS	Задана точність	дійсний	вхідне
-	x _N	Нове значення кореня, допоміжна змінна	дійсний	визнач.

Вирішимо рівняння $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$. Визначимо корені аналітично.

Знаходимо:

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5;$$

$$D = 0,16 - 0,6 < 0.$$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$ (див. табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Таблиця знаків функції $f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
sign $f(x)$	-	-	+	+

Рівняння має один дійсний корінь, який знаходиться в проміжку $[-1;0]$.

Щоб уточнити корінь, знайдемо похідну $f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5$.

Для обчислень застосуємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

де $x_0 = -1$;

Обчислення розташуємо в таблиці (див. табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Результати обчислення кореню рівняння $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-1	1	-1	-0,2	3,9	-0,051
1	-0,949	0,9006	-0,8547	-0,0093	3,5814	-0,0026
2	-0,9464	0,8957	-0,8477	-0,0004	3,5657	-0,00001

Відповідь: $\tilde{\alpha} \approx -0,946$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) У чому полягає метод Ньютона для розв'язання рівняння з одним невідомим?
- 2) Яку він має швидкість збіжності?
- 3) Яку ще назву має цей метод?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 5

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Уточнення коренів методом ітерацій.

Мета заняття Вміти знаходити корені алгебраїчного або трансцендентного рівняння методом ітерацій.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Уточнення коренів рівняння методом ітерацій.
- 2 Геометрична інтерпретація методу простих ітерацій.

Література

- 1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: учеб.посobie /Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006 – 480с.
- 2 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. – 2- е изд. – М.:Высшая школа, 1976 г. –192 с.

Навчальні матеріали лекції

- 1 Навчальне питання Уточнення коренів рівняння методом ітерацій.

Цей метод є одним із найефективніших і зручно реалізовуваних на ЕОМ методів наближеного розв'язування рівнянь. Його застосовують також для знаходження розв'язків диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь. Суть методу полягає в наступному. Рівняння замінюють еквівалентним йому рівнянням виду $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – неперервна функція. Далі вибирають деяке початкове наближення кореня x_0 і будують числову послідовність $\{x_n\}$, де кожне наступне значення x_n знаходять через попереднє за формулою методу ітерацій $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n=1,2,\dots$ Процес побудови послідовності $\{x_n\}$ називається методом ітерацій або

методом послідовних наближень. Легко бачити, що коли послідовність $\{x_n\}$ збіжна, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, то c є коренем рівняння $x = \varphi(x)$, а значить і рівняння $f(x) = 0$. Дійсно, перейшовши до границі у формулі методу ітерацій і врахувавши неперервність функції $\varphi(x)$, маємо

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = \varphi(c).$$

Таким чином, за допомогою методу ітерацій граничне значення c можна знайти з довільним ступенем точності.

Достатні умови збіжності методу та оцінку наближень сформульовано в наступній теоремі, доведення якої подано, наприклад.

Теорема 1. Нехай функція $\varphi(x)$ визначена і диференційована на проміжку $[a, b]$ і $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Всі послідовні наближення x_n , які одержуються за рекурентним співвідношенням $x_n = \varphi(x_{n-1})$, не виходять за межі (a, b) . Тоді послідовність $\{x_n\}$ збіжна, границя цієї послідовності — єдиний корінь рівняння на (a, b) і справедлива наступна оцінка наближень

$$|c - x_n| < \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Зазначимо, що у випадку $q \leq 1/2$ для оцінки одержаних наближень часто використовують таку нерівність $|x_n - c| \leq |x_n - x_{n-1}|$.

Для того, щоб використати метод ітерацій, необхідно представити рівняння $f(x) = 0$ у вигляді $x = \varphi(x)$, причому так, щоб $|\varphi'(x)| < 1$.

Покажемо універсальний спосіб такого представлення

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = x - \lambda f(x), (\lambda > 0) \Rightarrow x = \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = x - \lambda f(x).$$

Легко бачити, що коли $x = \varphi(x)$, то взявши $\lambda = \frac{1}{M}$, матимемо

$$|\varphi'(x)| \leq \left| 1 - \frac{f'(x)}{M} \right| \leq \left| 1 - \frac{m}{M} \right| = q < 1$$

Зауважимо, що коли $f'(x) < 0$, то рівняння $f(x) = 0$ замінюють на $g(x) = 0$, де $g(x) = -f(x)$, і тоді умова $g'(x) > 0$ виконуватиметься.

Отже, при $\lambda = \frac{1}{M}$ функція $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ задовольняє умови теореми 1.

2 Навчальне питання: Геометрична інтерпретація методу простих ітерацій.

Геометрична інтерпретація методу простих ітерацій. З рисунка 5.1 видно, що $|\varphi'(x)| < 1$, так як тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y_2 = \varphi(x)$ менше $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$. Отже, для произвольного початкового наближення x_0 відповідно до 1-ї ітерації при $k=0$ визначається $\varphi(x_0)$, яке дорівнює значенню x_1 на графіку функції $y_1=x$, а оскільки трикутник OAB прямокутний та рівнобедрений, то $OB=x_1$. На другий ітерації при $k=1$ визначається $\varphi(x_1)$, яке дорівнює значенню x_2 на графіку функції $y_1=x$, а оскільки трикутник OCD рівнобедрений і прямокутний, то $CD=OD=x_2$, тобто ітераційні значення x_0, x_1, x_2 , прагнуть у бік точного кореня ξ (вказано стрілкою справа наліво).

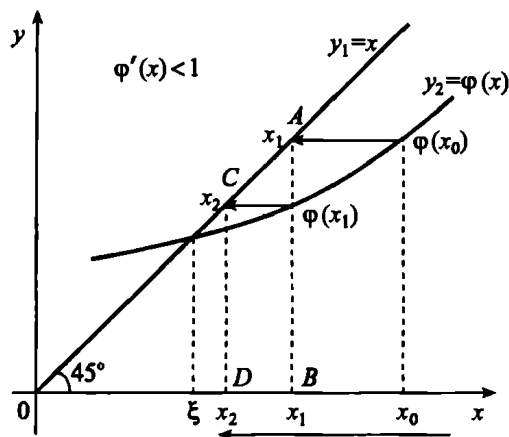


Рисунок 5.1 – До методу простих ітерацій у разі $\varphi'(x) < 1$

На рисунку 5.2 $\varphi'(x) > 1$. З рисунку видно, що ітераційний процес розходиться (наближення кореня x_0, x_1, x_2 , прагнуть від кореня ξ).

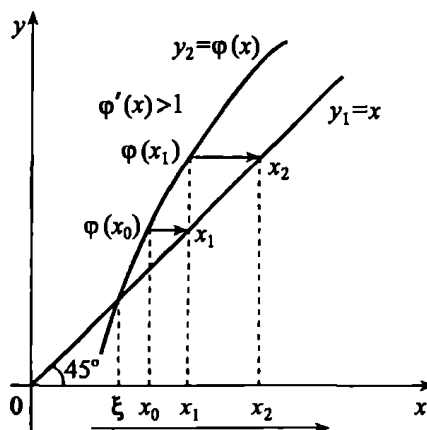


Рисунок 5.2 – До методу простих ітерацій в випадку $\varphi'(x) > 1$.

На рисунку 5.3 представлений випадок $|\varphi'(x)| < 1, \varphi'(x) < 0$. Процес ітерацій сходиться з обох сторін, тобто наближення кореня знаходяться то ліворуч, то праворуч від точного кореня ξ .

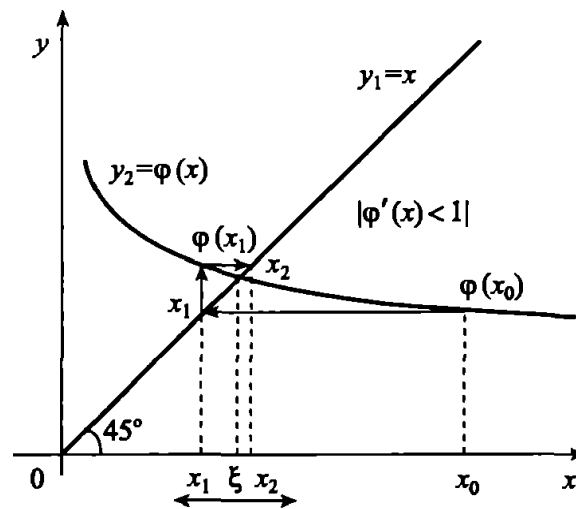


Рисунок 5.3 – До методу простих ітерацій в випадку $|\varphi'(x)| < 1, \varphi'(x) < 0$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) В чому суть методу ітерацій?
- 2) Запишіть розрахункові формули для методу ітерацій.
- 3) В чому полягає геометричний сенс методу ітерацій.
- 4) Сформулюйте достатні умови збіжності методу ітерацій.

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 6

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Математична постановка задачі інтерполявання. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Мета заняття Знати математичну постановку задачі інтерполявання та вміти інтерполювати функції за допомогою многочленів Лагранжа

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Математична постановка задачі інтерполявання.
- 2 Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Література

1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: навч. посіб /Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006 – 480с.
2 Чисельні методи [Текст] : навч. посіб / под заг. ред. Н.И. Даніліна. – 2-е вид. – М.:Вища школа, 1976 г. –192 с.

Навчальні матеріали лекції

- 1 Навчальне питання: Математична постановка задачі інтерполявання.

Під час розв'язання багатьох обчислювальних задач на практиці часто доводиться замінити одну функцію $f(x)$ (відому, невідому або частково відому) близькою до неї деякою функцією $\varphi(x)$ яка має визначені властивості. Наприклад, якщо $f(x)$ задана таблицею значень $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ для деякої кінцевої множини аргументів x^i і в процесі розв'язування задачі необхідно використовувати значення $f(x)$ для проміжних значень аргументу, функцію $\varphi(x)$ будують таким чином, щоб у заданих точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ вона приймала значення, що збігаються зі значеннями $f(x_0), f(x_1), \dots,$

$f(x_n)$, а в інших точках відрізка $[a, b]$, що належить області визначення $f(x)$, приблизно зображувала функцію $f(x)$ з тим чи іншим ступенем точності. Тоді під час розв'язування задачі замість функції $f(x)$ використовують функцію $\varphi(x)$. Задача побудови функції $\varphi(x)$ називається задачею наближення. Найчастіше функцію $\varphi(x)$, якою оперують під час наближення, будують у вигляді многочлена. Такий спосіб наближення базується на теоремі Вейерштраса про наближення неперервної функції $f(x)$ на заданому відрізку за допомогою поліномів (функція $f(x)$ може бути досить добре наближена за допомогою полінома деякого порядку m на множині точок $x_0, x_1, \dots, x_n$).

У цьому разі функції виду:

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x) \quad (6.1)$$

будемо називати узагальненими поліномами (узагальненими многочленами) порядку n , де $c_0, c_1, \dots, c_n$ — деякі постійні коефіцієнти. Функцію $f(x)$ і поліном $\varphi(x)$ вважають близькими, якщо вони збігаються на заданій системі точок $x_0, x_1, \dots, x_n$. Ці точки називають вузлами інтерполяції.

Якщо $\varphi(x)$ і $f(x)$ — диференційовані функції, то іноді у постановці задачі наближення вимагають і збігу у вузлах інтерполяції похідних $f(x)$ і $\varphi(x)$ деяких порядків.

На практиці за базисні функції $\{\varphi_i(x)\}$ часто беруть послідовність степеневих функцій відносно $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ тобто $\varphi_0(x) = x_0, \varphi_1(x) = x_1, \dots, \varphi_m(x) = x_m$.

Тоді маємо звичайний поліном степеня m :

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m. \quad (6.2)$$

Для знаходження коефіцієнтів $c_i, i=0, 1, \dots, m$ (6.1) використаємо умову $\varphi(x_j) = f(x_j), j=0, 1, \dots, n$ і сформуємо систему з $(n+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь на множині точок $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_0)c_0 + \varphi_1(x_0)c_1 + \dots + \varphi_m(x_0)c_m &= f(x_0), \\ \varphi_0(x_1)c_0 + \varphi_1(x_1)c_1 + \dots + \varphi_m(x_1)c_m &= f(x_1), \\ \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \varphi_0(x_n)c_0 + \varphi_1(x_n)c_1 + \dots + \varphi_m(x_n)c_m &= f(x_n). \end{aligned} \quad (6.3)$$

За умови $n = m$ система рівнянь (7.3) має єдиний розв'язок у випадку, коли вектори $\varphi_i(x_j), i, j = 0, 1, \dots, n$ лінійно незалежні. Така задача наближення називається

задачею інтерполяції. Якщо $m \ll n$, то система рівнянь може бути розв'язана методом найменших квадратів.

Коли $m = n$ і базисні функції $\{\varphi_i(x)\}$ мають вигляд поліномів (6.2), коефіцієнти c_i можна обчислити за допомогою такої системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_n x_0^n &= f(x_0), \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_n x_1^n &= f(x_1), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \dots + c_n x_n^n &= f(x_n). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Визначник цієї системи, який називають визначником Вандермонда,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

не перетворюється на нуль, якщо серед сукупності вузлів немає таких, що збігаються, отже, матриця системи (6.4) є не виродженою і система має єдиний розв'язок.

Іноді за $\{\varphi_i(x)\}$ може братися також послідовність показових функцій:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = e^{a_1 x}, \varphi_2(x) = e^{a_2 x}, \dots, \varphi_m(x) = e^{a_m x},$$

де $\{\varphi_i\}$ — деяка числова послідовність попарно різних дійсних чисел. Тоді

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \dots + c_m e^{a_m x}. \quad (6.6)$$

2 Навчальне питання: Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Виходячи з однозначності інтерполяційного многочлена $\varphi(x)$, можна побудувати поліном, коефіцієнти якого визначаються із системи (6.4). Позначимо задані значення $f(x_i) = y_i$. Оскільки шуканий поліном $\varphi(x)$ повинен приймати в заданих вузлах $x_0, x_1, \dots, x_m$ значення, що збігаються зі значеннями $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$, можна записати $\varphi(x)$ у вигляді:

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^m y_j \phi_j(x) \quad (6.7)$$

де $\phi_j(x)$ — многочлен степеня m , що у вузлах інтерполяції задовольняє такі умови

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Даний варіант запису многочлена $\varphi(x)$ називають інтерполяційним поліномом Лагранжа. Для пошуку $\varphi(x)$ знаходять многочлен степеня n , що перетворюється на нуль у вузлах інтерполяції x_i ($i=0,1,\dots, j-i, j+i, n$) і дорівнює одиниці у точці x_j . Многочлен, що задовольняє ці вимоги, може бути записаний у вигляді:

$$\phi_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

Тоді, якщо у виразі (6.7) $\phi_j(x)$ знайдені у вказаний вище спосіб, то інтерполяційний многочлен (6.7) називається інтерполяційним многочленом Лагранжа. Позначимо його як $L_n(x)$, для того щоб відрізнити цю формулу від інших випадків інтерполяції, остаточно:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \quad (6.8)$$

Побудова інтерполяційного многочлена Лагранжа в такому вигляді для кожної конкретної задачі пов'язана зі значними обчислювальними затратами.

Задача інтерполяції значно спрощується, якщо значення x , є рівновіддаленими, тобто $x_i = x_0 + ih$, ($i = 1, 2, \dots, n$), тоді можна ввести позначення

$$\frac{x-x_0}{h} = t,$$

і інтерполяційний поліном буде мати вигляд:

$$L_n(x) = (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{C_n^i y_i}{t-i} \quad (6.9)$$

У (2.9) коефіцієнти перед знаком суми

$$(-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!}$$

не залежать ні від значень функції $f(x)$, ні від відстані між вузлами інтерполяції h , їх називають коефіцієнтами Лагранжа.

Похибки інтерполяційної формули Лагранжа

Різницю між функцією $f(x)$ та її інтерполяційним наближенням $L_n(x)$ називають залишковим членом інтерполяційної формули або похибкою інтерполяції:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x). \quad (6.10)$$

Судячи з формули (6.8), зрозуміло, що у вузлах інтерполяції ця похибка дорівнює нулю, тому похибку (6.10) необхідно оцінювати в інших точках відрізка $[a, b]$. Для цього припускають, що інтерпольована функція $f(x)$ має на відрізку $[a, b]$ неперервні похідні до порядку $n+1$. Такі припущення виконуються для більшості випадків, із якими доводиться стикатися на практиці.

Будемо вважати, що $f(x)$ — відома функція. Побудуємо інтерполяційний поліном $f(x_i) \approx L_n(x)$, причому в $n+1$ вузлах інтерполяції $f(x_i) = L_n(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$. Потрібно оцінити похибку $R(x)$ у заданій точці відрізка $[a, b]$, що не є вузлом інтерполяції:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x), x \neq x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Введемо допоміжну функцію

$$\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - R_n(z), \quad (6.11)$$

у випадку, коли $z=x$, одержуємо $\varphi(x)=0$ з огляду на співвідношення (6.10). Припустимо, що похибка має вигляд:

$$R_N(x) = C(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = C \omega(x),$$

де C — деяка постійна, котру можна визначити як

$$C = \frac{f(x) - L_n}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Із умов $\varphi(z) = 0$ і $\varphi(x_i) = 0 = f(x_i) - L_n(x_i) - R_n(x_i)$ зрозуміло, що $\varphi(z)$ перетворюється на нуль принаймні в $n+2$ точках $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. За теоремою Роля, якщо функція в точках α і β перетворюється на нуль, то знайдеться точка η на відрізку $[a, b]$, похідна якої теж перетворюється на нуль. Тобто всередині кожного проміжку $x_0, x_1, \dots, x_n$ знайдуться точки $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ похідні в яких дорівнюють нулю. Можна стверджувати, що:

$$\varphi'(z) = 0 \text{ не менш ніж у } n+1 \text{ точках;}$$

$$\varphi''(z) = 0 \text{ не менш ніж у } n \text{ точках;}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\varphi(n+1)(z) = 0 \text{ принаймні в одній точці } \eta.$$

Можна вважати, що на відрізку $[a, b]$ знайдеться точка ξ , для якої

$$\varphi_{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Знайдемо значення

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(z) - r_n^{(n+1)}(z)$$

$$L_n^{(n+1)}(z) - r_n^{(n+1)}(z)$$

Оскільки $L_n(z)$ — поліном степеня n , то $L_{(n+1)}(x) = 0$, $R_n(z)$ — поліном степеня $n+1$, тому $R(n+1)(z) = (n+1)! C$. Тоді $\varphi(n+1)(\xi) = f(n+1)(\xi) - (n+1)! C$. Звідси одержимо вираз для константи:

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Тоді на підставі припущення про вид похибки маємо:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) \quad (6.12)$$

Похибку інтерполяції полінома Лагранжа можна оцінити в такий спосіб:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| \quad (6.13)$$

$$M_{n+1} = \sup |f^{(n+1)}(x)|$$

Для випадку, коли $f(x)$ є поліномом степеня n , інтерполяція, проведена по будь-яких точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, здійснюється точно, тобто $L_n(x) \equiv f(x)$.

Формула (7.13) дає можливість провести апріорну оцінку похибки, тобто для випадку аналітично заданої функції $f(x)$ провести оцінювання до початку обчислень.

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Яка умова існування єдиного розв'язку задачі поліноміальної інтерполяції?
- 2) Назвіть базисні функції степеневі інтерполяції.
- 3) Сформулюйте постановку задачі інтерполювання функції.
- 4) Що таке параболічне інтерполювання?
- 5) Дайте означення інтерполяційного многочлена, інтерполяційної формули.
- 6) Виведіть формулу інтерполяційного многочлена Лагранжа.

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 7

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Інтерполяційна формула Ньютона для рівних проміжків.

Мета заняття Знати математичну постанову задачі інтерполювання та вміти інтерполювати функції за допомогою формул Ньютона.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Інтерполяційна формула Ньютона для рівних проміжків.

Література

1 Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: навч.посіб /Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BVH, 2006 – 480с.
2 Чисельні методи [Текст] : навч. посіб / под заг. ред. Н.И. Даніліна. – 2-е вид. – М.:Вища школа, 1976 г. –192 с.

Навчальні матеріали лекції

- 1 Навчальне питання: Інтерполяційна формула Ньютона для рівних проміжків.

Обчислення значень функції для значень аргументу, що знаходяться на початку таблиці, зручно проводити, користуючись першою інтерполяційною формулою Н'ютона.

Нехай функція $f(x)$ задана значеннями

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n)$$

у рівновіддалених вузлах інтерполяції $x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad \dots, \quad x_n = x_0 + nh$. Необхідно побудувати інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ степені n такий, що

$$P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P_n(x_n) = y_n$$

В силу одиничності многочлена степені n , побудованого по $n+1$ значенням функції $f(x)$, многочлен $P_n(x)$ являється різновидом запису інтерполяційного многочлену і у кінцевому рахунку співпадає із многочленом, отриманим по формулі Лагранжа. Будемо шукати поліном у виді

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (7.1)$$

У цьому виразі нам не відомі коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$. Для того щоб знайти a_0 , припустимо $x = x_0$. Тоді при підстановці $x = x_0$ у вираз (7.1) усі доданки, окрім першого, обернуться у нуль, тобто $P_n(x_0) = a_0$, а значення функції у точці x_0 відомо за умовою задачі: $P_n(x_0) = y_0$. Звідси, $a_0 = y_0$.

Щоб знайти коефіцієнт a_1 , складемо першу кінцеву різницю для многочлену $P_n(x)$ у точці x . Згідно визначенню кінцевої різниці, маємо

$$\Delta P_n(x) = P_n(x + h) - P_n(x).$$

Виконавши підстановку, отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) = & [a_0 + a_1(x - x_0 + h) + a_2(x - x_0 + h)(x - x_1 + h) + \\ & + a_3(x - x_0 + h)(x - x_1 + h)(x - x_2 + h) + \dots + a_n(x - x_0 + h) \times \\ & \times (x - x_1 + h) \dots (x - x_{n-1} + h)] - [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0) \times \\ & \times (x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots \\ & \dots (x - x_{n-1})] = a_1[(x - x_0 + h) - (x - x_0)] + a_2[(x - x_0 + h)(x - x_1 + h) - \\ & - (x - x_0)(x - x_1)] + a_3[(x - x_0 + h)(x - x_1 + h)(x - x_2 + h) - \\ & - (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)] + \dots + a_n[(x - x_0 + h)(x - x_1 + h) \dots \\ & \dots (x - x_{n-1} + h) - (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})] = ha_1 + 2ha_2(x - x_0) + \\ & + 3ha_3(x - x_0)(x - x_1) + \dots + nha_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2}). \end{aligned}$$

Обчислимо першу кінцеву різницю многочлену $P_n(x)$ у точці x_0 . Тут також всі члени, окрім першого, обернуться у нуль, і, відповідно, $\Delta P_n(x_0) = a_1 h$, але

$$\Delta P_n(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$

звідки $\Delta y_0 = a_1 h$ і

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Щоб визначити коефіцієнт a_2 , складемо кінцеву різницю другого порядку:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x + h) - \Delta P_n(x).$$

Після перетворень отримаємо

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!h^2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot h^2 a_3 (x - x_0) + \dots \\ \dots + (n-1)nh^2 a_n (x - x_0) \dots (x - x_{n-3}).$$

Вважаємо $x = x_0$; тоді все члени, окрім першого, знову обернуться у нуль і $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!h^2 a_2$. Звідки

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Обчислюючи кінцеві різниці більш високих порядків і вважаючи $x = x_0$, прийдемо до загальної формули для отримання коефіцієнтів:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

де будемо рахувати, що $0! = 1$ і $\Delta^0 y = y$. Підставивши знайдені значення коефіцієнтів a_i у вираз (2.14), отримаємо першу інтерполяційну формулу Н'ютона.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (7.2)$$

На практиці часто використовують формулу Н'ютона в іншому виді. Для цього введемо змінну $q = (x - x_0)/h$, де h — крок інтерполяції, а q — число кроків. Тоді перша інтерполяційна формула Н'ютона прийме наступний вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (7.3)$$

Формулу (7.16) зручно використовувати для інтерполяції на початку відрізка інтерполяції $[a, b]$, де q мало за абсолютною величиною.

Якщо за число вузлів інтерполяції прийняти $n=1$, то отримаємо формулу лінійного інтерполювання

$$P(x) = y + q\Delta y_0.$$

При $n=2$ отримаємо формулу параболічного, або квадратичного, інтерполювання

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_0.$$

На практиці часто буває необхідно згустити крок інтерполяції якої-небудь таблиці із рівновіддаленими аргументами. У таблиці можна рахувати, що число вузлів інтерполяції необмежено. Тоді вибирають n так, щоб кінцева різниця $\Delta^n y_i$ була

постійна із заданою мірою точності. За початкове значення x_0 можна обирати будь-яке значення аргументу.

Приклад. У таблиці 7.1 подані значення функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Таблиця 7.1 – Значення функції

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,0	0,0540	-100	15	-2
2,1	440	-85	13	0
2,2	355	-72	13	-3
2,3	283	-59	10	-10
2,4	224	-49	0	
2,5	175	-49		
2,6	136			

Застосовуючи першу інтерполяційну формулу Н'ютона, знайти φ .

Рішення. Будуємо кінцеві різниці функції $\varphi(x)$; обмежимося третьою кінцевою різницею. За x приймаємо число, найбільш близьке до заданого, тобто вважаємо $x = 2,2$. Так як крок $h = 0,1$:

$$q = \frac{2,22 - 2,20}{0,1} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2.$$

Використовуючи формулу (3), знаходимо

$$\begin{aligned} y &= 0,355 + 0,2(-0,072) + \frac{0,2(0,2-1)}{2!} 0,0013 + \\ &+ \frac{0,2(0,2-1)(0,2-2)}{3!} (-0,0003) = 0,0339 \end{aligned}$$

Друга інтерполяційна формула Ньютона

Для інтерполювання у кінці таблиці за звичай застосовують другу інтерполяційну формулу Ньютона.

Нехай на відрізку $[a, b]$ дані $n+1$ різних значень аргументу $x_0, x_1, \dots, x_n$, яким відповідають значення функції

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n),$$

а крок інтерполяції постійний та дорівнює h , тобто $x_{i+1} = x_i + h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Побудуємо інтерполяційний многочлен виду

$$\begin{aligned} P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ & + a_3(x - x_n)(x - x_n)(x - x_{n-2}) + \dots \\ & \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \end{aligned} \quad (7.4)$$

У цьому многочлені невідомі коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Їх треба підібрати так, щоб були виконані рівності

$$P_n(x) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P_n(x_n) = y_n,$$

Для цього необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (7.5)$$

Коефіцієнт a_0 знайдемо, вважаючи, що $x = x_n$ у рівності (7.4):

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

Звідки $a_0 = y_n$.

Із виразу для першої кінцевої різниці знайдемо a_1 :

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) = & 1 \cdot h a_1 + 2 h a_2 (x - x_{n-1}) + 3 h a_3 (x - x_{n-2})(x - x_{n-1}) + \dots \\ & \dots + n h a_n (x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1). \end{aligned}$$

Ідси, вважаючи, що $x = x_{n-1}$ і враховуючи співвідношення (7.5), маємо

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

$$\text{Звідси, } a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Із виразу для другої кінцевої різниці знайдемо a_2 :

$$\begin{aligned} \Delta^2 P_n(x) = & 2! h^2 a_2 + 2 \cdot 3 h^3 a_3 (x - x_{n-2}) + \dots \\ & \dots + n(n-1) h^2 a_n (x - x_1) \dots (x - x_{n-2}) \end{aligned}$$

Вважаючи, що $x = x_{n-2}$, отримаємо

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = 2! h^2 a_2,$$

$$\text{Звідки } a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів у формулу (7.1), отримаємо

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\
& + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots \\
& \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n) \dots (x - x_1).
\end{aligned}
\tag{7.6}$$

Це і є друга інтерполяційна формула Ньютона.

На практиці використовують формулу Ньютона в іншому виді. Нехай $q = (x - x_n)/h$; тоді

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2, \dots$$

і формула (3) прийме вигляд

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots \\
& \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.
\end{aligned}
\tag{7.7}$$

Перша інтерполяційна формула Ньютона використовується для інтерполювання на початку відрізка $[a, b]$, тобто для інтерполювання вперед і екстраполювання назад. При інтерполюванні по першій формулі Ньютона $q = (x - x_0)/h > 0$. При екстраполюванні назад також використовують першу інтерполяційну формулу Ньютона, але у цьому випадку $q = (x - x_0)/h < 0$.

При інтерполюванні у кінці таблиці, тобто інтерполюванні назад, коли крок інтерполяції постійний, використовують другу формулу Ньютона, де $q = (x - x_0)/h < 0$. Друга інтерполяційна формула Ньютона застосовується і при екстраполюванні вперед, тоді $q = (x - x_0)/h > 0$.

Приклад. У табл. 7.2 наведені значення інтегралу ймовірностей.

Таблиця 7.2 – Значення інтегралу ймовірностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,1	0,03983	3943	-78	-36
0,2	0,07926	3865	-114	-33
0,3	0,11791	3751	-147	-28
0,4	0,15542	3604	-175	
0,5	0,19146	3429		
0,6	0,22575			

Необхідно обчислити $y(0,58)$.

Рішення. Тут крок інтерполяції $h = 0,1$. Звідки

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,58 - 0,6}{0,1} = -\frac{0,02}{0,1} = -0,2.$$

Для знаходження $y(0,58)$ скористаємось другою інтерполяційною формулою Ньютона:

$$\begin{aligned} P_3(0,58) &= 0,22575 + (-0,2) \cdot 0,03429 + \frac{(-0,2)(-0,2+1)}{2!}(-0,00175) + \\ &+ \frac{(-0,2)(-0,2+1)(-0,2+2)}{3!}(-0,00028) = 0,21904. \end{aligned}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Складіть таблицю значень деякої функції $f(x)$ і побудуйте для неї перший та другий інтерполяційні многочлени Ньютона.
- 2) Сформулюйте постановку задачі наближення функцій. Які постановки задачі наближення функцій ви ще знаєте?
- 3) Чим відрізняються задачі апроксимації, інтерполяції та екстраполяції функцій?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 8

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Постановка задачі. Побудова емпіричних лінійних залежностей. Методи уточнення параметрів лінійних залежностей.

Мета заняття Знати принципи побудови емпіричних лінійних залежностей. Знати методи уточнення параметрів лінійних залежностей.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Принципи побудови емпіричних лінійних залежностей.
- 2 Метод найменших квадратів.

Література

1 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. – 2-е изд. – М.:Высшая школа, 1976 г. –192 с.

2 Бояршинов, Б. Численные методы. Учебный курс / Б. Бояршинов. – М.: Интуит, 2003-2012.

Навчальні матеріали лекції

- 1 Принципи побудови емпіричних лінійних залежностей.

У процесі вивчення різних питань природознавства, економіки і техніки, соціології, педагогіки доводиться на основі великої кількості дослідних даних виявляти суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об'єкт, а також встановлювати форму зв'язку між різними зв'язаними одна з одною величинами (ознаками).

Нехай у результаті досліджень дістали таблицю деякої функціональної залежності (див. табл. 8.1).

Таблиця 8.1 – Таблиця функціональної залежності

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Треба знайти аналітичний вигляд функції $y = f(x)$, яка добре відображала б цю таблицю дослідних даних. Функцію $y = f(x)$ можна шукати у вигляді інтерполяційного поліному. Але інтерполяційні поліноми не завжди добре відображають характер поведінки таблично заданої функції. До того ж значення y_1 дістають у результаті експерименту, а вони, як правило, сумнівні. У цьому разі задача інтерполювання табличної функції втрачає сенс. Тому шукають таку функцію $y = F(x)$, значення якої при $x = x_i$ досить близькі до табличних значень y_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Формулу $y = F(x)$ називають емпіричною, або рівнянням регресії y на x . Емпіричні формули мають велике практичне значення, вдало підібрана емпірична формула дає змогу не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, «згладжуючи» значення величини y , а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень x .

Процес побудови емпіричних формул складається з двох етапів: встановлення загального виду цієї формули і визначення найкращих її параметрів.

Щоб встановити вигляд емпіричної формули, на площині будують точки з координатами (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$). Деякі з цих точок сполучають плавною кривою, яку проводять так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх даних точок. Після цього візуально визначають, графік якої з відомих нам функцій найкраще підходить до побудованої кривої. Звичайно, намагаються підібрати найпростіші функції: лінійну, квадратичну, дробово-раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну.

Встановивши вигляд емпіричної формули, треба знайти її параметри (коефіцієнти). Найточніші значення коефіцієнтів емпіричної формули визначають методом найменших квадратів. Цей метод запропонували відомі математики К. Гаусс і А. Лежандр.

2 Метод найменших квадратів

Сутність методу (звичайного) методу найменших квадратів (МНК) полягає у знаходженні таких значень матриці параметрів A моделі, при яких сума квадратів

залишків й була б мінімальною. Мінімізуя суму квадратів залишків й шляхом знаходження першої похідної за складовими, можна знайти оцінки для теоретичної моделі.

У ряді випадків при вирішенні економічних задач необхідно встановити теоретичну (аналітичну) залежність $y = f(x)$ на підставі фактичних спостережень. Результати їх можуть бути наведені у таблиці для n пар значень змінних: (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$). Проаналізуємо, який вид кривої краще підійде для апроксимації емпіричних (фактичних) даних. У спрощеному випадку це може бути пряма, з кривих - парабола, гіпербола, степенева залежність та ін.

Припустимо, що для даного розподілення емпірично отриманих точок вибраний вид залежності у вигляді безперервної лінії $f(x)$ між точками. Функцію $f(x)$ описують параметри a_i , знайшовши які можна получить рівняння апроксимуючої лінії. Наприклад, рівняння прямої задаються у вигляді $y = a_0 + a_1x$, рівняння параболи - $y = a_0 + a_1x^2$ тощо.

Відхилення ординат теоретичної лінії у від емпіричних даних у, - при тих же абсцисах відповідають різниці $u_i = y - y_i$ (при $i=1 \dots n$). Чим менші ці різниці, тим краще вибрана теоретична лінія буде апроксимувати емпіричні дані.

Французьким математиком Лежандром у XIX ст. запропоновано в якості міри відхилення точок А від апроксимуючої теоретичної лінії брати мінімальну суму S квадратів відхилення їх ординат y_i від теоретичних значень у:

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (y - y_i)^2 = \min$$

З цього і назва методу - метод найменших квадратів (або скорочено МНК).

Оцінювати параметри економетричної моделі за допомогою МНК можна за умов:

1) Математичне сподівання залишків, тобто середня величина випадкових значень, дорівнює нулю. Якщо ця передумова не виконується, то йдеться про помилки специфікації. Специфікацію моделі називають її аналітичну форму, яка складається з певного виду вибраної функції чи системи функцій для змінних. До помилок специфікації приводять:

– відсутність у моделі основної пояснювальної (незалежної) змінної, що призводить до зміщення оцінок параметрів і може привести до хибних висновків щодо значень параметрів; введення в модель пояснювальної змінної, яка не є істотною для вимірюваного зв'язку, що може привести до неправильно встановленого кількісного зв'язку між змінними;

– використання невідповідних аналітичних форм вибраних функцій для моделі, що як і при першій помилці специфікації може привести до зміщення оцінок параметрів моделі.

2) Дисперсія відображає розсіювання випадкових значень m , навколо їх математичного сподівання. Наявність сталої (постійної) дисперсії залишків називається гомоскедастичністю. Ця властивість може виконуватись лише тоді, коли залишки y є помилками вимірювання.

3) Незалежні змінні моделі не пов'язані із залишками, при порушенні цієї умови для оцінювання параметрів моделі використовуються не МНК, а інші методи, які будуть розглянуті пізніше.

4) Незалежні змінні моделі утворюють незалежну систему векторів, тобто ці змінні незалежні між собою. Якщо незалежні змінні пов'язані між собою, то це явище називають мультиколінеарністю і воно є небажаним, так як робить оцінку параметрів за допомогою МНК ненадійною чутливою до вибраної специфікації моделі.

До властивостей оцінок параметрів рівнянь регресії відносяться такі: незміщеність; обґрунтованість; ефективність; інваріантність.

Оцінка параметрів за допомогою МНК є незміщеною. Якщо оцінка незміщена, то при багаторазовому повторенні випадкової вибірки середнє значення помилок дорівнює нулю. Обґрунтованістю вибіркової оцінки A параметрів A називається така вимога, яка відповідає закону великих чисел і означає, що чим більшими розглядаються вибірки, тим більше ймовірність того, що помилка оцінки не перевищує достатньо малої величини. Ефективність оцінки параметрів A пов'язана з величиною дисперсії оцінок.

В регресійному аналізі розрізняють рівняння парної (простої) та множинної (багатофакторної) регресії. Коли зв'язок із залежною змінною y здійснюється з одним видом незалежних змінних x , то рівняння регресії є найпростішим і має назву рівняння

парної регресії (проста модель). Якщо залежна змінна у пов'язана з декількома видами незалежних змінних , то така залежність має назву рівняння множинної регресії. Використання МНК для оцінки теоретичних параметрів моделі розглянутих видів рівнянь парної регресії приводить до таких систем нормальних рівнянь. Рішення наведених систем нормальних рівнянь парної регресії дозволить знайти оцінки параметрів моделі. У разі множинної регресії оцінка параметрів моделей здійснюється за допомогою виразу , записаному у матричному вигляді.

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Охарактеризуйте основні методи формування емпіричної вибірки.
- 2) Які умови покладено в основу методу найменших квадратів?
- 3) У чому полягає принцип побудови емпіричних лінійних залежностей?
- 4) Які існують методи уточнення параметрів лінійних залежностей?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 9

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Чисельне інтегрування функцій за допомогою формул прямокутників та трапецій

Мета заняття Вміти інтегрувати функції за допомогою формул прямокутників та трапецій

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Чисельне інтегрування функцій за допомогою формул прямокутників.
- 2 Чисельне інтегрування функцій за допомогою формул трапецій.

Література

- 1 Лященко, М.Я. Чисельні методи [Текст]: учеб.пособие / М.Я. Лященко, М.С. Головань. – К.: "Либідь", 1996 – 252 с.
- 2 Бояршинов, Б. Численные методы. Учебный курс / Б. Бояршинов. – М.: Интуит, 2003-2012.

Навчальні матеріали лекції

- 1 Навчальне питання: За допомогою формул прямокутників

З курсу математичного аналізу відомо, що якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, то певний інтеграл від цієї функції в межах від a до b існує і має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \text{де } F(x) \text{ — первісна для функції } f(x).$$

Для більшості елементарних функцій первісну $F(x)$ не вдається виразити через елементарні функції. Крім того, при практичних розрахунках підінтегральна функція

задається у вигляді таблиць. Все це призводить до необхідності заміни інтеграції чисельними методами.

Задача чисельної інтеграції полягає в наступному: знайти певний інтеграл на відрізку $[a, b]$, якщо підінтегральна функція на відрізку $[a, b]$ задана табличний.

Формули наближеної ітерації називаються квадратурними формулами. Розглянемо прості з них.

Метод прямокутників. Найбільш простим методом наближеного обчислення інтеграла є метод прямокутників, заснований на безпосередньому визначенні інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ де } \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \text{ є інтегральна сума, відповідна деякому}$$

розбиттю відрізання $[a, b]$ і деякому вибору на відрізках розбиття.

Обчислення певного інтеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ геометрично зводиться до

обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженою функцією $f(x)$, віссю абсцис і прямими $x=a$ і $x=b$ (див. рис. 9.1). Обчислимо наближене значення інтеграла таким чином. Замінімо криволінійну трапецію $DEba$ прямокутником $Aвba$, провівши AB так, щоб фігури DAC і CEB вийшли приблизно рівній площі. Тоді площі криволінійної трапеції, обмеженій графіком функції $y = f(x)$, і отриманого прямокутника $Aвba$ будуть приблизно рівні.

Враховуючи, що висота прямокутника $Aвba$ є значення функції в крапці, запишемо наступну наближену рівність:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\xi)$$

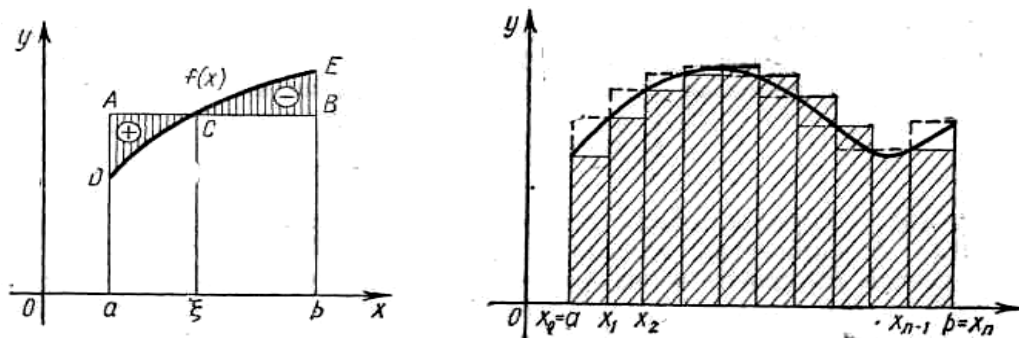


Рисунок 9.1 – Геометричний зміст методу прямокутників

Для збільшення точності чисельної інтеграції можна відрізок $[a, b]$ розбити на декілька частин і для кожної з них обчислити наближене значення площі криволінійної трапеції, підставою якої є відрізок $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i (i=0, 1, \dots, n-1)$, а заввишки — число, тобто значення функції в крапці $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ вибране з умови мінімуму помилки інтеграції. Тоді за наближене значення інтеграла на відрізку $[a, b]$ приймають інтегральну суму:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Практично зручно ділити відрізок $[a, b]$ на рівні частини, а $\Delta x_i = (b-a)/n$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) лівими або правими кінцями відрізків розбиття.

Якщо крапку ξ_i сумістити з лівим кінцем відрізка x_i , то наближене значення інтеграла геометрично дорівнює площі заштрихованої ступінчастої фігури (див. рис. 9.2), і може бути представлено формулою лівих прямокутників:

$$I_{\text{Л}} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (9.1)$$

де $h = (b - a)/n$ — крок.

Якщо ж як крапка ξ_i вибрати правий кінець відрізка x_{i+1} , то наближене значення інтеграла графічно дорівнює площі ступінчастої фігури, обмеженою зверху пунктирною лінією, і обчислюється за формулою правих прямокутників:

$$I_{\text{П}} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h \sum_{i=1}^n y_i \quad (9.2)$$

2 За допомогою формул трапецій

Наближене значення певного інтеграла можна обчислити і іншим способом. Замінімо на відрізку $[a, b]$ дугу AB графіка підінтегральної функції $y=f(x)$ хордою (див. рис. 9.2, а), що стягує її, і обчислимо площу трапеції $Aeba$. Набудемо значення певного інтеграла чисельно рівним площі цієї трапеції:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (9.3)$$

Це і є формула трапецій для наближеного обчислення інтеграла.

Погрішність підрахунку

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$$

для формули трапецій оцінюється так:

$$R = -\frac{h}{12} y''(\xi), \quad (9.4)$$

де точка $\xi \in (x_0, x_0+h)$. У випадку, якщо $y''(\xi) > 0$, обчислення за формулою (9.3) дає значення інтеграла з лишком; якщо $y''(\xi) < 0$, то інтеграл обчислюється з недоліком.

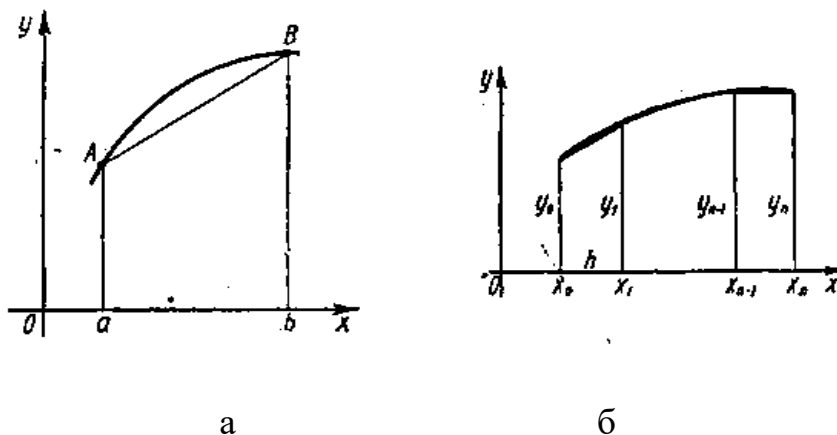


Рисунок 9.2 – Геометричний зміст методу трапецій

Точність обчислень зростає, якщо відрізок $[a, b]$ розділити на декілька частин і застосувати формулу трапецій до кожного відрізка Sx_i (див. рис. 9.2, б). Тоді

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x_i$$

Для простоти обчислень зручно ділити відрізок $[a, b]$ на рівні частини, в цьому випадку довжина кожного з відрізків розбиття є $h = (b-a)/n$. Чисельне значення інтеграла на відрізку x_i дорівнює

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

а на всьому відрізку $[a, b]$ відповідно

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Оскільки під знаком суми величини y_i зустрічаються двічі (від $i=1$ до $i=n-1$), то остання рівність запишеться таким чином:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left[\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right] \quad (9.5)$$

Ця формула називається загальною формулою трапецій. Загальну формулу трапецій можна переписати у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = \frac{b-a}{n} \left[\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right], \quad (9.6)$$

де крок

$$h = \frac{b-a}{2} \quad (9.7)$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1) У чому полягає чисельне інтегрування функцій за допомогою формул прямокутників?

2) У чому полягає чисельне інтегрування функцій за допомогою формул трапецій?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 10

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Чисельне інтегрування функцій за допомогою формули Сімпсона.

Мета заняття Вміти інтегрувати функції за допомогою формули Сімпсона

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

1 Чисельне інтегрування функцій за допомогою формули Сімпсона.

Література

1 Лященко, М.Я. Чисельні методи [Текст]: учеб.пособие / М.Я. Лященко, М.С. Головань. – К.: "Либідь", 1996 – 252 с.

2 Бояршинов, Б. Численные методы. Учебный курс / Б. Бояршинов. – М.: Интуит, 2003-2012.

Навчальні матеріали лекції

1 Чисельне інтегрування функцій за допомогою формули Сімпсона.

Обчислення певного інтеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ геометрично зводиться до

обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженою функцією $f(x)$, віссю абсцис і прямими $x=a$ і $x=b$. Точність наближеного інтегрування помітно зростає, якщо підінтегральну функцію $y=f(x)$ на відрізку $[a, b]$ замінити квадратичною функцією (див. рис. 10.1), що приймає у вузлах $x_0 = a$, $x_1, x_2 = b$ значення $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$ і $y_2 = f(x_2)$.

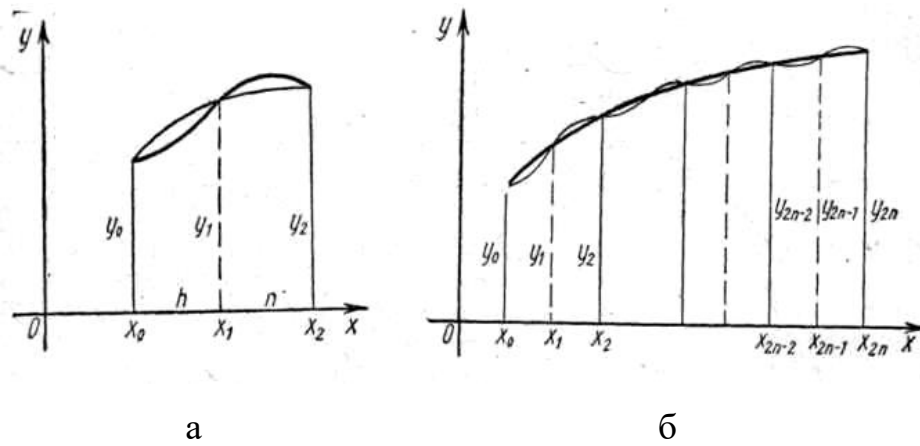


Рисунок 10.1 – Геометричний зміст методу Сімпсона

Як інтерполяційний многочлен скористаємося многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = (2h y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot \frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot \frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot h \frac{4h^2}{2}) = \\ &= 2h y_0 + 2h \Delta y_0 + \frac{h}{3} \Delta^2 y_0 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Співвідношення (10.1) називається формулою Сімпсона. Формула Сімпсона володіє підвищеною точністю і є точною не тільки для многочленів другого ступеня, але і третьою.

Погрішність формули Сімпсона

$$R = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

оцінюється таким чином:

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{(iv)}(\xi), \quad (10.2)$$

де точка $\xi \in [x_0, x_0 + 2h]$.

Для збільшення точності обчислень відрізок $[a, b]$ розбивають на n пар ділянок $[x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}]$ (рис. 10.1, б) і заміняючи підінтегральну функцію інтерполяційним

многочленом Ньютона другого ступеня, набувають наближеного значення інтеграла на кожній ділянці довжини $2h$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Тоді чисельне значення певного інтеграла на відрізку $[a, b]$ дорівнюватиме сумі інтегралів, тобто

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + (y_2 + \dots + y_{2n-2})] \quad (10.3)$$

Співвідношення (10.3) називається загальною формулою Сімпсона, її можна записати також у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + (y_2 + \dots + y_{2n-2})] \quad (10.4)$$

де $h = \frac{b-a}{2n}$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1) У чому полягає чисельне інтегрування функцій за допомогою формули Сімпсона?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 11

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Основні поняття о диференційних рівняннях. Обчислення диференційного рівняння методом Ейлера.

Мета заняття Знати основні поняття о диференціальних рівняннях та їх принципи інтегрування методом Ейлера.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Основні поняття о диференційних рівняннях.
- 2 Обчислення диференційного рівняння методом Ейлера.

Література

- 1 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. – 2-е изд. – М.:Высшая школа, 1976 г. –192 с.
 - 2 Бояршинов, Б. Численные методы. Учебный курс / Б. Бояршинов. – М.: Интуит, 2003-2012.
-

Навчальні матеріали лекції

- 1 Навчальне питання: Основні поняття о диференційних рівняннях.

Дуже багато проблем і задач природничих, технічних і гуманітарних областей людського знання описують диференціальні рівняння. Тому вміти складати і розв'язувати диференціальні рівняння – значить володіти потужним засобом прийняття обґрунтованих рішень.

Диференціальні рівняння поділяють на два типи – звичайні та в частинних похідних. Звичайні диференціальні рівняння містять одну незалежну змінну, як правило, час. Приклад – другий закон Ньютона, де переміщення залежить лише від

часу. Диференціальні рівняння в частинних похідних мають кілька незалежних змінних, тому похідні за кожною змінною зокрема називають частинними. Наприклад, миттєве значення електромагнітного сигналу в довгій лінії залежить не лише від часу, але й від координати вздовж лінії. Тому рівняння довгої лінії є диференціальним рівнянням у частинних похідних.

Нагадаємо деякі властивості звичайних диференціальних рівнянь. Почнемо з рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної:

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t)), \quad (11.1)$$

де t – незалежна змінна, час;

$\frac{dy}{dt}$ – похідна функції $y(t)$;

f – деяка задана нелінійна функція.

Розв'язок диференціального рівняння (11.1) – це така функція $y(t)$, підстановка якої разом з похідною до рівняння (11.1) перетворює його в тотожність. Наприклад, для лінійного рівняння $\frac{dy}{dt} = -2y$ розв'язком є функція $y(t) = Ce^{-2t}$, похідна якої $\frac{dy}{dt} = -2Ce^{-2t}$. Константу C можна визначити з початкової умови $y(0) = a_0$.

Загальний розв'язок рівняння (11.1) містить довільну константу C .

Знаменитий французький математик Огюстен Коші (Augustin Cauchy) був надзвичайно плідним вченим першої половини 19-го сторіччя. Йому належить біля 800 наукових праць. Зокрема, він довів теорему про існування єдиного часткового розв'язку рівняння (11.1), якщо задано C і виконано умови неперервності функції $f(t, y(t))$ та її похідної.

Звичайне диференціальне рівняння n -го порядку має такий вигляд:

$$F(y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}) = 0, \quad (11.2)$$

де t – час;

$d^i y / dt^i$ – i -та похідна функції $y(t)$;

F – деяка задана функція.

Коші запропонував записувати рівняння (11.2) у формі системи n рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних (рівняння у формі Коші):

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(y_1(t), \dots, y_n(t)); \quad (j = 1, \dots, n); \quad (11.3)$$

де $y_1(t) = y(t)$ з (11.2).

Загальні розв'язки рівнянь (11.2) і (11.3) містять вже n довільних констант, які можна визначити з n початкових умов: $\frac{dy^i(0)}{dt^i} = a_i$; $i = 0, \dots, n-1$; для рівняння (11.2) або $y_i(0) = a_i$ $i = 1, \dots, n$; для рівняння (11.3). Доведено аналог теореми Коші про існування єдиного розв'язку рівнянь (11.2) і (11.3).

Аналітично, у вигляді формул, можна знайти розв'язки лише лінійних звичайних диференціальних рівнянь та окремих простих нелінійних. Використовують різноманітні наближені методи аналітичного розв'язування, що ґрунтуються на спрощеннях нелінійних диференціальних рівнянь, перш за все їх лінеаризації. Однак наближені методи мають обмежене застосування та їхні похибки складно контролювати. Дотепер також застосовують для розв'язування диференціальних рівнянь аналогові обчислювальні машини, засновані на дослідженні перехідних процесів у електричних аналогах диференціальних рівнянь. Але точність аналогових машин невисока.

З поширенням цифрових ЕОМ загальноновживаними стали числові методи розв'язування диференціальних рівнянь. Пояснимо ідею числового розв'язування на прикладі рівняння першого порядку (11.1).

Будь-яка цифрова ЕОМ працює дискретно у часі, тобто сприймає дані та видає результати лише в певні моменти часу. Як наслідок всі функції, що використовує ЕОМ, повинні бути дискретизовані. Наприклад, для диференціального рівняння (11.1) функцію неперервного аргумента $f(y(t))$ замінює функція дискретного аргумента $f(y(t_k))$, де k – номер часового відліку. Відповідну заміну можна зробити для похідної $\frac{dy}{dt}$. Згідно з другою формулою, $\frac{dy(t_{k+1})}{dt} \approx \frac{(y(t_{k+1}) - y(t_k))}{h}$, де $h = t_{k+1} - t_k$ – крок за часом. Отже, дискретизоване рівняння (11.1) може мати вигляд

$$\frac{(y^{(k+1)} - y^{(k)})}{h} = f^{(k)}, \quad (11.4)$$

де

$$y^{(k+1)} = y(t_{k+1}), \quad y^{(k)} = y(t_k), \quad f^{(k)} = f(y(t_k)).$$

Рівняння (11.4) називають різницеvim. Зазвичай його записують розв'язаним відносно $y^{(k+1)}$:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf^{(k)}; \quad y(0) = a_0. \quad (11.5)$$

За формулою (11.5) можна послідовно обрахувати всі дискретні значення функції $y^{(k)}$, починаючи з $y(0) = a_0$, тобто знайти дискретний розв'язок рівняння (11.1). Звичайно, цей розв'язок є наближеним, бо заміна похідної різницеvim відношенням є наближеною. Але дуже заманливо замість розв'язування нелінійного диференціального рівняння (11.1) багатократно обчислити формулу (11.5). А похибку наближення можна як завгодно зменшити, зменшуючи крок h .

2 Обчислення диференційного рівняння методом Ейлера.

Вирішити диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ чисельним методом – це означає для заданої послідовності аргументів $x_0, x_1, \dots, x_n$ і числа y_0 , не визначаючи функцію $y = F(x)$, знайти такі значення $y_1, y_2, \dots, y_n$, що $y_i = F(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) і $F(x_0) = y_0$. Таким чином чисельні методи дозволяють замість знаходження функції $y = F(x)$ отримати таблицю значень цієї функції для заданої послідовності аргументів. Величина $h = x_k - x_{k-1}$ називається кроком інтеграції.

Метод Ейлера. Хай дано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (11.6)$$

з початковою умовою

$$x = x_0, y(x_0) = y_0 \quad (11.7)$$

Потрібно знайти вирішення рівняння (11.6) на відрізку $[a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і отримаємо послідовність x_0, x_1, x_n , де $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), а $h = (b - a)/n$ - крок інтеграції.

Виберемо k -й ділянку $[x_k, x_{k+1}]$ і проінтегруємо рівняння (11.6):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

тобто

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx \quad (11.8)$$

Якщо в останньому інтегралі підінтегральну функцію на ділянці $[x_k, x_{k+1}]$ прийняти постійною і рівною початковому значенню в точці $x = x_k$, то отримаємо

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k) dx = f(x_k, y_k) \cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y'_k h$$

Тоді формула (11.8) набере вигляду

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h \quad (11.8')$$

Позначивши $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, тобто $y'_k h = \Delta y_k$, отримаємо

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \quad (11.9)$$

Продовжуючи цей процес і кожного разу приймаючи підінтегральну функцію на відповідній ділянці постійною і рівною її значенню на початку ділянки, отримаємо таблицю вирішень диференціального рівняння на заданому відрізку $[a, b]$. Рівність (11.9) означає, що на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива $y = y(x)$ приблизно замінюється прямолінійним відрізком, що виходить з точки $M_k(x_k, y_k)$ з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$. Як наближення шуканої інтегральної кривої отримуємо ламану лінію з вершинами в точках $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), \dots, M_n(x_n; y_n)$. Перша ланка стосується дійсної інтегральної кривої в точці $M_0(x_0; y_0)$ (див. рис. 11.1).

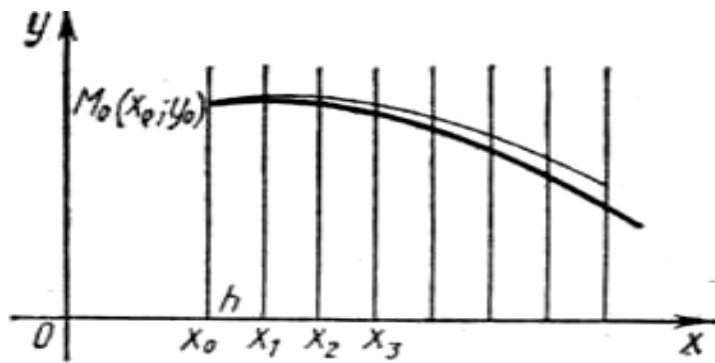


Рисунок 11.1 – Графік інтегральної кривої

Якщо функція $f(x, y)$ в деякому прямокутнику

$$R\{|x - x_0| \leq a, \{|y - y_0| \leq b\}$$

задовольняє умові

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq N |y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}) \quad (11.10)$$

і, крім того

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M, \quad (M = \text{const}) \quad (11.11)$$

то має місце наступна оцінка погрішності:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^n - 1] \quad (11.12)$$

де $y(x_n)$ — значення точного вирішення рівняння (1) при $x = x_n$, а y_n — наближене значення, отримане на n -м. *шаге*.

Формула (113.12) має в основному теоретичне застосування. На практиці, як правило, застосовують «подвійний прорахунок». Спочатку розрахунок ведеться з кроком h , потім крок дроблять і повторний розрахунок ведеться з кроком $h/2$. Погрішність точнішого значення y^*_n оцінюється формулою:

$$|y^*_n - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1) Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
- 2) Чому єдиний розв'язок звичайного диференціального рівняння існує лише за початкових умов?
- 3) Сформулюйте постановку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Що є її розв'язком? У якому вигляді подається розв'язок чисельним методом?
- 4) Виведіть ітераційну формулу метода Ейлера.
- 5) Поясніть проблему жорстких звичайних диференціальних рівнянь.
- 6) Запишіть формулу неявного метода Ейлера.

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.

Лекція № 12

з навчальної дисципліни «Чисельні методи»

Тема Обчислення диференційного рівняння методом Рунге-Кута.

Мета заняття Знати основні принципи інтегрування методом Рунге-Кута.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: мультимедійний комплект

Час – 1 година

План проведення лекції

- 1 Інтегрування звичайних диференційних рівнянь методом Рунге-Кута.
- 2 Геометричний смисл методу.

Література

- 1 Численные методы [Текст] : учеб. пособие / под общ. ред. Н.И. Данилина. – 2-е изд. – М.:Высшая школа, 1976 г. –192 с.
- 2 Бояршинов, Б. Численные методы. Учебный курс / Б. Бояршинов. – М.: Интуит, 2003-2012.

Навчальні матеріали лекції

- 1 Інтегрування звичайних диференційних рівнянь методом Рунге-Кута.

З появою і розвитком ЕОМ у чисельному інтегруванні звичайних диференціальних рівнянь бурхливого розвитку набули методи типу Рунге-Кутта. В обчислювальній практиці їх широко застосовують завдяки тому, що вони:

- однокрокові, тобто для обчислення розв'язку задачі Коші в точці x_{k+1} треба знати її розв'язок лише в точці x_k ;
- дають змогу здійснювати чисельне інтегрування зі змінним кроком;
- особливо зручні для програмування на ЕОМ, оскільки обчислення за ними мають циклічний характер.

Нехай, треба знайти розв'язок для диференціального рівняння першого порядку, що задовольняє початковій умові (12.1) на відрізку $[a, b]$.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (12.1)$$

Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{1, n}$, де $h = \frac{b-a}{n}$ – крок інтегрування. В методі Рунге-Кутта, так як і в методі Ейлера, послідовні значення шуканої функції у визначаються за формулою

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$. Для визначення Δy_i розкладемо функцію $y(x)$ в ряд Тейлора і обмежимося членами ряду до h^4 включно. Тоді приріст функції запишемо

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x). \quad (12.2)$$

Похідні $y''(x), y'''(x), y^{(4)}(x)$ знайдемо послідовним диференціюванням рівняння $y'(x) = f(x, y)$. Можна показати, що з точністю до членів четвертого порядку значення Δy обчислюється за формулою

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (12.3)$$

де коефіцієнти $k_1; k_2; k_3; k_4$ знаходять з формул:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), & k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), & k_4 &= hf(x+h, y+k_3), \end{aligned} \quad (14.4)$$

Таким чином, застосування методу Рунге-Кутта зводиться до послідовного обчислення чотирьох значень чисел

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}), \end{cases} \quad (12.5)$$

тоді на їх основі – приросту

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (12.6)$$

а відтак – наступного наближення $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Всі обчислення зручно виконувати за певною схемою і результати заносити в таблицю (див. табл. 12.1). На першому кроці ($i=0$) в таблицю записують початкові

умови x_0, y_0 , а потім – результати обчислень за формулами (12.5) та (12.6). Відтак знаходять $\Delta y_0 = \frac{1}{6} S$, де S – сума елементів останнього стовпчика. Потім знаходять наступне наближення за формулою $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Заповнення таблиці на кроці m здійснюється аналогічно в припущенні, що початковою точкою є (x_m, y_m) . У таблиці 12.1 треба всюди у формулах прийняти $i=m$.

Таблиця 12.1 – Обчислення диференційного рівняння за схемою

i	x	y	$y'=f(x,y)$	$k=hf(x,y)$	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	x_0	y_0	$F(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$F(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$F(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0 + k_3^{(0)}$	$F(x_0+h, y_0 + k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6} \Sigma = \Delta y_0$
1	x_1	$y_1=y_0+\Delta y_0$	$F(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$F(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$F(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1 + k_3^{(1)}$	$F(x_1+h, y_1 + k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6} \Sigma = \Delta y_1$
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$			

Якщо ε – задана точність розв’язку, то кількість n точок поділу вибирають так, щоб крок $h = \frac{b-a}{n}$ задовольняв умову $h^4 < \varepsilon$.

2 Геометричний смисл методу.

Числа k_1, k_2, k_3, k_4 мають простий геометричний смисл. Нехай крива M_0CM_1 (див. рис. 12.1) є вирішенням диференціального рівняння з початковою умовою (12.1).

Через точки M проведемо пряму, перпендикулярну відрізку BE . Тоді також D має

- 2) При рассмотрении в процессе работы по делу документов, содержащих сведения, составляющие государственную тайну, должностные лица органов государственной безопасности должны соблюдать требования, установленные в законе, и не разглашать эти сведения.

4) Який з відомих вам методів розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння треба застосовувати в тих чи інших випадках?

Розробив: Ланська С.С.

Розглянуто та схвалено

на засіданні циклової комісії

програмної інженерії

Протокол № 4 від 17.11.2021 р.

Голова комісії _____ Ланська С.С.